



Universidad
Carlos III de Madrid

Departamento de MECÁNICA DE MEDIOS CONTINUOS Y
TEORÍA DE ESTRUCTURAS

PROYECTO FIN DE CARRERA

MODELIZACIÓN ANALÍTICA DE PANELES SÁNDWICH SOMETIDOS A IMPACTOS DE BAJA VELOCIDAD

Autor: Daniel Rueda Lastres

Tutores: Enrique Barbero Pozuelo
Sonia Sánchez Sáez

Leganés, octubre de 2012

Título: MODELIZACIÓN ANALÍTICA DE PANELES SÁNDWICH SOMETIDOS
 A IMPACTOS DE BAJA VELOCIDAD

Autor: Daniel Rueda Lastres

Directores: Enrique Barbero Pozuelo
 Sonia Sánchez Sáez

EL TRIBUNAL

Presidente: _____

Vocal: _____

Secretario: _____

Realizado el acto de defensa y lectura del Proyecto Fin de Carrera el día __ de
_____ de 20__ en Leganés, en la Escuela Politécnica Superior de la
Universidad Carlos III de Madrid, acuerda otorgarle la CALIFICACIÓN de

VOCAL

SECRETARIO

PRESIDENTE

RESUMEN

En este Proyecto Fin de Carrera se ha estudiado el comportamiento de un panel sándwich frente a impacto de baja velocidad en el que se obtiene la fuerza de contacto entre el proyectil y el panel sándwich en función del tiempo de impacto. Los paneles que se han estudiado están constituidos por las pieles, formadas por laminas de carbono-epoxy, y el núcleo de nido de abeja, de Nomex. Estos paneles tienen un laminado ortótropo, son simétricos y están empotrados en dos de sus caras.

Para ello, se ha analizado un modelo dinámico que consiste en representar un sistema de dos grados de libertad mediante masas, resortes y un amortiguador, simulando el impacto de un proyectil sobre una estructura sándwich. Las masas representan las masas efectivas del sándwich y del proyectil, el amortiguador representa la resistencia al aplastamiento del núcleo y los resortes representan la rigidez del laminado y del panel sándwich. Las fuerzas de los resortes y del amortiguador se hallarán en primer lugar en un estudio estático y se ajustarán posteriormente con propiedades dinámicas del material.

Las soluciones analíticas de este modelo se han comparado con datos experimentales para validar el modelo dinámico. Se ha desarrollado y mejorado dicho modelo analítico para obtener unos resultados que se ajustaran mejor a los datos experimentales y una vez conseguido se ha realizado un estudio paramétrico donde se determina cómo varía la fuerza de contacto máxima entre el proyectil y el panel sándwich en función de parámetros que intervienen en el problema de impacto, como pueden ser la velocidad del proyectil, el espesor del núcleo, el diámetro del proyectil o el tipo de laminado del panel sándwich.

ÍNDICE GENERAL

Capítulo 1. INTRODUCCIÓN

1.1.	MOTIVACIÓN.....	2
1.2.	OBJETIVOS.....	4
1.3.	CONTENIDOS DEL PROYECTO.....	5

Capítulo 2. GENERALIDADES

2.1.	INTRODUCCIÓN.....	7
2.2.	ESTRUCTURAS SÁNDWICH.....	7
2.3.	IMPACTO SOBRE ESTRUCTURAS SÁNDWICH.....	9
2.3.1	IMPACTO DE ALTA VELOCIDAD.....	13
2.3.2	IMPACTO DE BAJA VELOCIDAD.....	13
2.4.	ESTUDIOS DE IMPACTO SOBRE ESTRUCTURAS SÁNDWICH.....	16

Capítulo 3. DESCRIPCIÓN DEL MODELO ANALÍTICO

3.1.	INTRODUCCIÓN.....	23
3.2.	GEOMETRÍA DEL PANEL SÁNDWICH.....	23
3.3.	INDENTACIÓN ESTÁTICA.....	24
3.3.1.	DEFORMACIÓN LOCAL.....	24
3.3.1.1.	ENERGÍA ELÁSTICA DEBIDA A FLEXIÓN, U	26
3.3.1.2.	TRABAJO PLÁSTICO DEBIDO AL APLASTAMIENTO DEL NÚCLEO, D	29
3.3.1.3.	TRABAJO DEBIDO A LA FUERZA DE INDENTACIÓN, V ..	30
3.3.1.4.	ENERGÍA POTENCIAL MÍNIMA Π	31

3.3.2.	DEFORMACIÓN LOCAL. SOLUCIÓN APROXIMADA.....	32
3.3.2.1.	ENERGÍA ELÁSTICA DEBIDA A FLEXIÓN, U.....	33
3.3.2.2.	TRABAJO PLÁSTICO DEBIDO AL APLASTAMIENTO DEL NÚCLEO, D.....	34
3.3.2.3.	TRABAJO DEBIDO A LA FUERZA DE INDENTACIÓN, V..	35
3.3.2.4.	ENERGÍA POTENCIAL MÍNIMA Π	35
3.3.3.	DEFORMACIÓN GLOBAL.....	37
3.3.4.	DEFORMACIÓN TOTAL.....	39
3.4.	INDENTACIÓN DINÁMICA.....	40
3.4.1.	CÁLCULO DE LA MASA EFECTIVA DEL SÁNDWICH Y DE LA PIEL SUPERIOR.....	43
3.4.2.	CÁLCULO DE LA VELOCIDAD INICIAL DEL SÁNDWICH Y DE LA PIEL SUPERIOR.....	45

Capítulo 4. COMPARACIÓN DE RESULTADOS

4.1.	INTRODUCCIÓN.....	48
4.2.	DATOS EXPERIMENTALES Y DESCRIPCIÓN DEL PANEL SÁNDWICH.....	48
4.3.	CÁLCULO DE LAS PROPIEDADES ESTÁTICAS Y DINÁMICAS DEL MATERIAL.....	50
4.3.1.	CÁLCULO DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ DEL LAMINADO.....	50
4.3.2.	CÁLCULO DE LAS PROPIEDADES DINÁMICAS DEL PANEL SÁNDWICH.....	51
4.4.	COMPARACIÓN DE RESULTADOS.....	53
4.4.1.	RESPUESTA ESTÁTICA.....	53
4.4.1.1.	DEFORMACIÓN LOCAL.....	54
4.4.1.2.	DEFORMACIÓN TOTAL.....	55
4.4.2.	RESPUESTA DINÁMICA.....	56

Capítulo 5. MODIFICACIÓN DEL MODELO ANALÍTICO

5.1.	INTRODUCCIÓN.....	60
5.2.	RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA TENIENDO EN CUENTA LAS MASAS (M_F) Y (M_S).....	60
5.3.	RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA SIN LINEALIZAR K_{LD}	62
5.4.	RESOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES DEL MODELO SIN SIMPLIFICAR.....	65

Capítulo 6. ESTUDIO PARAMÉTRICO

6.1.	INTRODUCCIÓN.....	69
6.2.	VARIACIÓN DEL ESPESOR DEL NÚCLEO.....	69
6.3.	VARIACIÓN DE LA VELOCIDAD INICIAL DEL PROYECTIL....	77
6.4.	VARIACIÓN DEL DIÁMETRO DEL PROYECTIL.....	84
6.5.	VARIACIÓN DEL LAMINADO.....	89

Capítulo 7. CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS

7.1.	RESUMEN Y CONCLUSIONES.....	95
7.2.	TRABAJOS FUTUROS.....	96

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	97
ANEXO.....	99

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

1.1. MOTIVACIÓN

La utilización de materiales compuestos durante los últimos años ha aumentado, tanto a nivel industrial como en otros campos como la construcción, el militar o el transporte. Inicialmente, el desarrollo de estos materiales fue impulsado por sectores como el aeronáutico o el aeroespacial, pero las excelentes propiedades de estos materiales han provocado que se implantaran en una gran variedad de sectores.

Este tipo de materiales se ha ido desarrollando durante muchos años gracias al elevado presupuesto que se maneja en sectores como el aeronáutico. El objetivo de estos sectores es obtener materiales estructurales resistentes con el mínimo peso posible ya que una pequeña disminución de peso supone un ahorro considerable en el combustible y por lo tanto en el coste.



Figura 1.1. Aplicaciones de los materiales compuestos en diferentes sectores.

Otro campo en el que el empleo de materiales compuestos ha aumentado de una forma importante ha sido el deporte profesional, especialmente la Fórmula 1.



Figura 1.1. Automóvil de Fórmula 1 fabricado con materiales compuestos.

Gran parte del automóvil está fabricado con materiales compuestos: el chasis está fabricado por un material compuesto en estructura de nido de abeja con un laminado de fibra de carbono y los frenos de disco autoventilados son de fibra de carbono.

El automóvil debe ser lo más ligero posible para ahorrar combustible, debe ser aerodinámico, por lo que se necesitan materiales con los que se puedan conseguir gran variedad de formas complejas, y debe ser resistente, para soportar impactos en caso de accidente. El peso de estos coches (con agua, aceite y piloto) oscilan en torno a los 600 Kg. Estas características se consiguen mediante el uso de este tipo de materiales.

Existen muchos tipos de materiales compuestos con diferentes propiedades, que los hacen más aptos para unas aplicaciones u otras, dependiendo de a qué tipo de condiciones van a estar sometidos durante su uso. Los más comunes son los materiales compuestos laminados. Estos están formados por el apilamiento de varias láminas de matriz polimérica (epoxi, poliéster, vinilester, etc.) reforzadas con fibras de alta resistencia, como es el caso de la fibra de vidrio, de carbono o de aramida.

Destacan también, como materiales compuestos, las estructuras sándwich. Este tipo de material compuesto consiste en dos pieles delgadas de altas propiedades mecánicas, pegadas y separadas por un núcleo de espesor grande comparado con las pieles, que aporta ligereza a la estructura. Como pieles se suelen usar laminados aunque también son utilizados otros materiales como metales o maderas. Como núcleo son usuales los de tipo nido de abeja, fabricados de aluminio o de Nómex. Los materiales compuestos tipo sándwich son muy ligeros y presentan una rigidez a flexión muy elevada.

Dependiendo de la aplicación para que se utilicen, estos materiales estarán sometidos a impactos localizados. El daño producido por un impacto localizado es muy peligroso, ya que es difícil de detectar debido a su laminado o naturaleza del material. Esto puede causar una considerable reducción de sus propiedades mecánicas. Por este motivo es necesario caracterizar, predecir y prevenir el daño debido al impacto sobre materiales sándwich.

Existen dos tipos diferentes de impactos: impacto de alta velocidad e impacto de baja velocidad. Los impactos de baja velocidad pueden ser producidos por la caída de una herramienta en operaciones de mantenimiento o remodelación sobre una estructura. Los impactos de alta velocidad pueden ser por ejemplo, los producidos por el impacto de algún objeto pequeño sobre un coche de Fórmula 1 cuando éste circula a máxima velocidad.

Los impactos localizados pueden causar una considerable reducción de las propiedades del material. La caracterización, predicción y prevención del daño se realiza por medio de ensayos experimentales o bien, por medio de modelos analíticos. El objetivo de estos ensayos y modelos es comprobar cómo se comportan determinados materiales frente al impacto y determinar cómo influyen algunos parámetros como el tipo de laminado, la velocidad de impacto o la geometría del proyectil en su comportamiento.

Para comenzar a caracterizar un panel sándwich sometido a un impacto de baja velocidad se realiza un estudio analítico por medio de modelos simplificados, que nos permiten obtener resultados globales rápidamente. Estos modelos analíticos son muy importantes ya que con ellos conseguimos tener una visión global del comportamiento de la estructura de forma rápida. Posteriormente, teniendo en cuenta los resultados de los modelos simplificados, se usan modelos de elementos finitos para obtener resultados más precisos. Este tipo de estudios son más laboriosos por lo que la obtención de resultados globales por medio de modelos simplificados es muy importante para ahorrar tiempo en el análisis.

1.2. OBJETIVOS

El presente documento tiene el objetivo de estudiar el comportamiento de paneles sándwich sometidos a impactos de baja velocidad. Se evaluará cómo varía la fuerza de contacto entre el proyectil y el panel sándwich en función de distintos parámetros como el laminado, la velocidad de impacto, el diámetro del proyectil o el espesor del núcleo del panel sándwich.

Para ello se analizará el modelo analítico simplificado propuesto por M.S. Hoo Fatt y K.S. Park en 2001, que representa un impacto de baja velocidad sobre un panel sándwich y se verificarán los resultados de dicho modelo con los datos experimentales obtenidos por J.E. Williamson en 1991 en un ensayo experimental. Una vez validado el modelo analítico, se realizarán diversas modificaciones para obtener unos resultados que se ajusten más a los datos experimentales. Esto se realizará desarrollando las ecuaciones del modelo analítico sin las simplificaciones propuestas por M.S. Hoo Fatt y K.S. Park.

Para llegar al objetivo principal, se han desarrollado unos objetivos parciales, los cuales se exponen a continuación:

- Comprender y reproducir detalladamente el modelo analítico.
- Verificar el modelo analítico comparando las soluciones analíticas con los datos experimentales.
- Obtener unos resultados analíticos más ajustados a la realidad desarrollando dicho modelo analítico, sin realizar simplificaciones que puedan modificar o variar los resultados finales.
- Realizar un estudio paramétrico para obtener la fuerza de contacto entre el proyectil y el panel sándwich para paneles de diferentes geometrías y propiedades.

1.3. CONTENIDOS DEL PROYECTO

Este proyecto está dividido en siete capítulos que se presentan a continuación:

En el presente capítulo se exponen los motivos que justifican la realización de este proyecto, los objetivos que se quieren alcanzar y el contenido del mismo.

En el capítulo 2 se realiza una introducción a los materiales compuestos. Se diferenciará entre los distintos tipos que existen y se describirán sus propiedades y características más importantes. Además se definen los diferentes tipos de estudios de impacto y se recopilarán algunos de los estudios realizados por diferentes autores acerca de impactos sobre materiales compuestos.

En el tercer capítulo se reproduce el modelo analítico de impacto de baja velocidad sobre paneles sándwich propuesto por M.S Hoo Fatt y K.S. Park, analizando de forma detallada cada una de sus partes.

En el capítulo siguiente se compara la solución analítica de M.S Hoo Fatt y Kyong S. Park con la solución analítica obtenida en este proyecto. Estas soluciones se compararán con los datos experimentales de J.E. Williamson, verificando la validez de este modelo.

En el Capítulo 5 se realiza una mejora de dicho modelo analítico. Se obtendrán las soluciones de este nuevo modelo, comparándolo con los datos experimentales y las anteriores soluciones analíticas.

En el sexto capítulo se realiza un estudio paramétrico con el modelo del capítulo anterior que más se ha ajustado a los datos experimentales. Este estudio consiste en comprobar cómo varía la fuerza de contacto máxima en función de algunos parámetros del problema de impacto.

En el último capítulo se expone un resumen y las conclusiones obtenidas al finalizar este proyecto y los posibles trabajos futuros que se pudieran desarrollar.

Finalmente se presentan las referencias bibliográficas que se han consultado en la realización de este proyecto y el anexo, en el que se muestra el código que se ha implementado en el programa Matlab para la obtención de los resultados mostrados.

Capítulo 2

GENERALIDADES

2.1. INTRODUCCIÓN

Este capítulo comienza con la descripción de las propiedades y características de los diferentes tipos de estructuras sándwich que se utilizan en la actualidad. Además, se describirán los diferentes tipos de ensayos de impacto, distinguiendo entre impacto de baja velocidad e impacto de alta velocidad. Finalmente, se mostrarán algunos estudios de impacto sobre materiales compuestos tipo sándwich realizados por diferentes autores.

2.2. ESTRUCTURAS SÁNDWICH

Una estructura sándwich consiste, en su forma más simple, en dos pieles relativamente delgadas, pegadas y separadas por un núcleo con un espesor más grande que las anteriores.

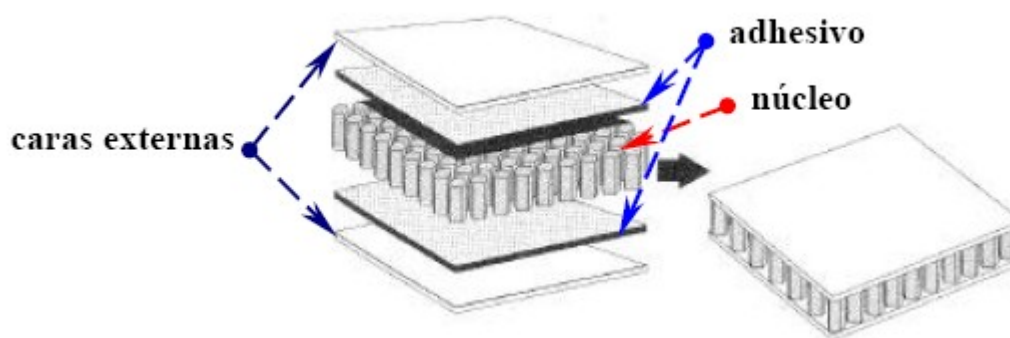


Figura 2.1 Estructura tipo sándwich.

Cada uno de los elementos que forma el panel sándwich cumple una determinada función dentro de la estructura. Entre las características más favorables de estos materiales de cara a su aplicación se encuentran las siguientes:

- Ligereza
- Rigidez a flexión.
- Elevado aislamiento térmico.

Una estructura sándwich presenta buen comportamiento a fatiga, debido a que las caras están unidas de forma continua al núcleo, lo que hace que las tensiones residuales sean mínimas.

Las pieles exteriores son los elementos más resistentes y pueden estar fabricados de distintos materiales: aluminio, contrachapado, laminado, metal, etc. La utilización de un tipo de piel o de otra depende de las propiedades que se quieran conseguir en la estructura sándwich y del tipo de núcleo que se vaya a utilizar. Las pieles más utilizadas son las constituidas por laminados, ya que ofrecen buenas propiedades mecánicas y son compatibles con la mayoría de núcleos.

El núcleo debe ser un material ligero y su función principal es la de separar las pieles y transmitir los esfuerzos cortantes de una piel a la otra. Se suelen caracterizar por su baja rigidez y resistencia a tracción. Los núcleos más utilizados son los de tipo panel de abeja y tipo espuma.

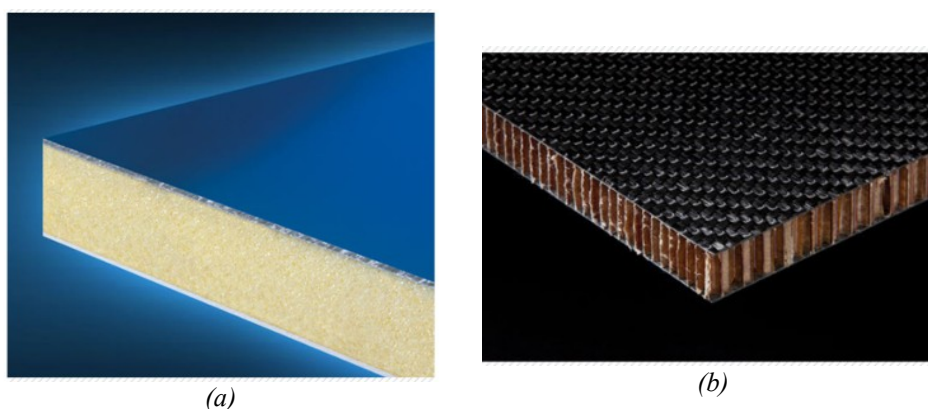


Figura 2.2 Diferentes tipos de paneles sándwich.
(a) Espuma /Aluminio; (b) Nido de abeja / Fibra de carbono

A continuación se muestra una tabla en la que se recogen los materiales más utilizados para pieles y para núcleos, así como sus disposiciones dentro del panel tipo sándwich:

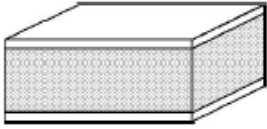
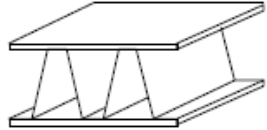
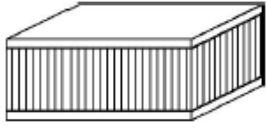
Estructura Sándwich	Pieles	Núcleo
 Espuma	Metales	Espuma de poliuretano Espuma de poliestireno
	Laminados	
	Contrachapados termoplásticos	
 Placa nervada	Amianto/cemento	Metal Material compuesto
	Metales	
	Laminados	
 Nido de abeja	Contrachapados	Nido de abeja de aluminio Nido de abeja de cartón
	Laminados	
	Aluminio	

Tabla 2.1 Materiales más utilizados en la fabricación de pieles y núcleos.

2.3. IMPACTO SOBRE ESTRUCTURAS SÁNDWICH

En muchas ocasiones, dependiendo de su aplicación, los materiales compuestos estarán sometidos a impactos localizados. El daño que se produce en un material compuesto debido a un impacto es difícil de detectar debido a la geometría o naturaleza del material. Esto puede causar una considerable reducción de sus propiedades mecánicas por lo que es necesario caracterizar, predecir y prevenir el daño debido al impacto sobre los diferentes materiales.

Los impactos son generalmente clasificados en impactos de baja velocidad e impactos de alta velocidad. Tanto los ensayos experimentales como los modelos analíticos de este tipo de impactos, tratan de simular las posibles situaciones reales a las que pueden estar sometidos los distintos componentes de una estructura.

En el caso de los impactos de baja velocidad, tratan de simular el impacto que produce la colisión de un objeto de masa considerable con una baja velocidad sobre una estructura. Debido a las duraciones de estos impactos, las ondas de tensión se propagan hasta el contorno del elemento y se reflejan varias veces durante el proceso de impacto por lo que la respuesta de la estructura es global, influyendo tanto su geometría como sus condiciones de contorno.

Por otro lado, en los ensayos de alta velocidad, se busca simular el impacto que produce la colisión de una masa pequeña sobre una estructura. En este tipo de impactos, el efecto está muy localizado en la zona de alrededor del impacto, debido a la duración del impacto, por lo que las condiciones de contorno de la estructura no son determinantes en el comportamiento de la misma.

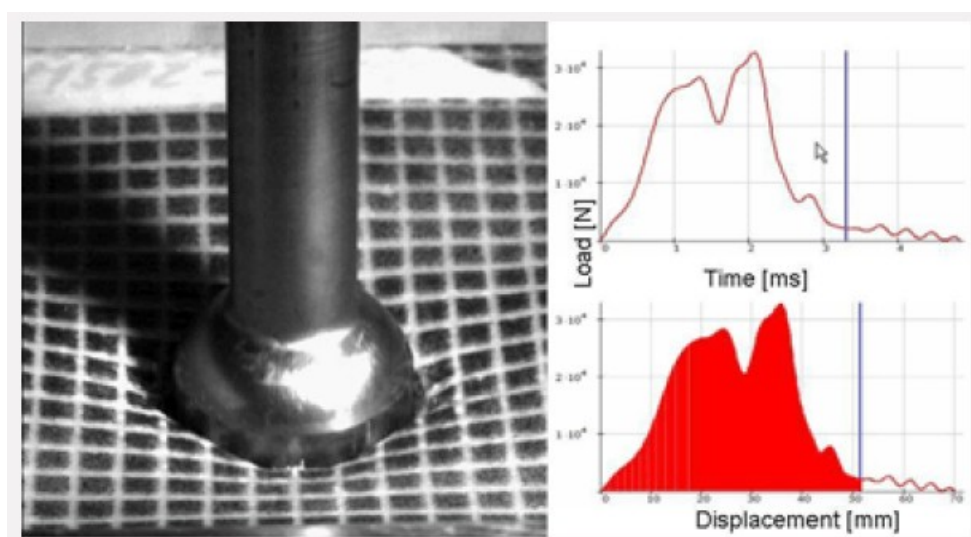


Figura 2.3 Test de impacto sobre panel sándwich.

Una constante inquietud es el efecto que producen los impactos de baja velocidad sobre materiales compuestos porque el daño provocado en estos materiales puede ser indetectable por inspección visual (Abrate, 1998). Por este motivo es muy importante analizar y estudiar el comportamiento de estos materiales frente a este tipo de impactos.

Para estudiar un impacto sobre una determinada estructura, por ejemplo un laminado, se necesita un modelo en el que se tenga en cuenta el comportamiento dinámico de la estructura, el contacto entre el proyectil y la estructura y el comportamiento dinámico del proyectil (Abrate, 2011). En muchos casos, la estructura es modelada usando la teoría de placas o vigas, pero también existen muchos estudios en los que se usan aproximaciones tridimensionales, métodos de elementos finitos o aproximaciones numéricas. Para determinar la deformación local debida al impacto (comportamiento del contacto) se usa generalmente la ley de Hertz .

Cuando se analiza un impacto sobre una estructura sándwich, se debe incluir también la respuesta local de la indentación (Abrate, 2011). Cuando el proyectil choca contra la piel superior, se produce una deflexión debida a la deformación del núcleo. Este tipo de deformación es despreciada en las teorías de placas y vigas pero debe ser incluida en el análisis de impacto sobre estructuras sándwich usando leyes de contacto significativamente diferentes a la de los laminados. A diferencia de los laminados, en estructuras sándwich, la indentación es dominada por el comportamiento del material del núcleo.

Tres posibles regímenes de indentación de la piel superior pueden ser descritos (M.S Hoo Fatt y K.S. Park, 2001), como se muestra en la siguiente figura:

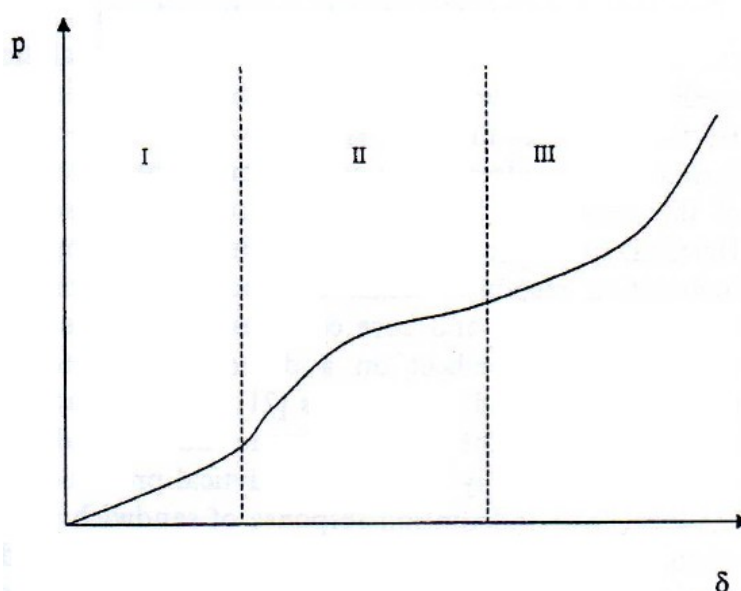


Figura 2.4. Regímenes de indentación local. Ley de contacto. (M.S Hoo Fatt et al, 2001)

Dependiendo del material del núcleo utilizado y su comportamiento frente a impacto nos situaremos en un régimen u otro:

- I Placa sobre una base elástica.
- II Placa sobre una base rígida-plástica.
- III Membrana sobre una base rígida-plástica.

Si la indentación local en un impacto es muy pequeña y el aplastamiento del núcleo es elástico (las tensiones transversales son más pequeñas que el límite elástico) la respuesta de la indentación local se encuentra considerando una placa sobre una base elástica. A medida que la indentación de la piel se hace más grande pero aún menos que la mitad del espesor de la placa, la respuesta de la indentación local se halla al considerar una placa sobre una base rígida-plástica. Si la indentación de la piel es mayor que el espesor de la piel, la respuesta de la indentación local se encuentra al considerar una membrana delgada apoyada sobre una base rígida-plástica.

En la mayoría de los casos, el objetivo de los estudios de impacto sobre estructuras sándwich es la prevención del daño que se produce en estas estructuras. Este tipo de impactos puede producir daño en las pieles, en el núcleo y en la interfase entre las pieles y el núcleo. La iniciación del daño y su tamaño depende de las propiedades del material del núcleo y la relación entre las propiedades del núcleo y de las pieles (Abrate, 1998). Cinco modos de fallos son identificados debido a impactos de baja velocidad sobre estructuras sándwich: rotura del núcleo, delaminación, deformación del núcleo, rotura de la matriz de la piel y rotura de las fibras de la piel.

En un panel sándwich, el daño producido en la piel superior es similar al producido en laminados simples. En un impacto de baja velocidad, la rotura de la matriz es el primer tipo de fallo que se produce en los materiales compuestos. La rotura de la matriz genera la separación entre la fibra y la matriz, debido a las distintas tensiones de tracción, compresión o flexión que aparecen. Normalmente, las roturas de la matriz están orientadas en planos paralelos a la dirección de las fibras del material impactado. La forma de daño que se produce en la matriz puede ser de diferentes formas, tal y como se muestra en la Figura 2.5:

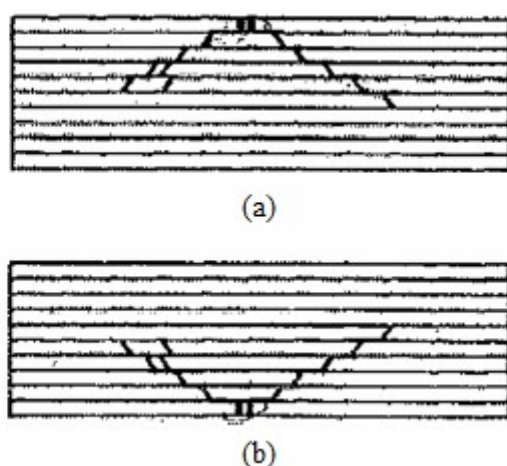


Figura 2.5 Forma de daño en la matriz. (a) Pino; (b) Pino invertido. (Abrate, 1998)

La delaminación es la rotura que se produce por la propagación de las fisuras a través de la matriz, y que da lugar al despegue entre láminas adyacentes con una orientación diferente de las fibras. En un impacto de baja velocidad, buena parte de la energía de impacto es utilizada en la producción de este tipo de fallo, (Abrate, 1998). Son los daños más críticos ya que reducen significativamente la fuerza del laminado, y en muchas ocasiones no son visibles en la superficie impactada pudiendo pasar desapercibidos en una inspección visual.

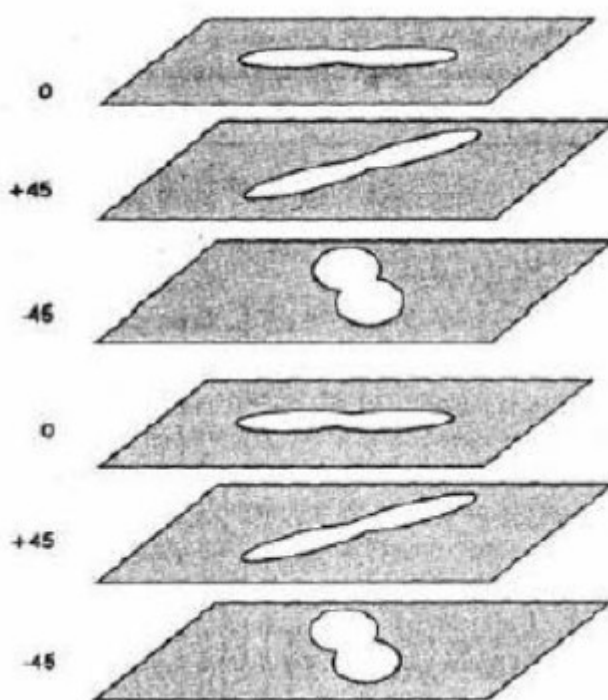


Figura 2.6 Orientación de la delaminación. (Abrate, 1998)

La rotura de las fibras se produce generalmente después de la rotura de la matriz y la delaminación. Este fallo se produce como resultado de la propagación de las fisuras en dirección perpendicular a las fibras. La rotura de las fibras que tiene lugar debajo del percutor es debida a los altos esfuerzos localizados y los efectos de la penetración; sin embargo, la que se produce sobre la cara posterior no impactada es debida a los altos esfuerzos de flexión inducidos por el núcleo.

El daño que se produce en el núcleo de un panel sándwich depende del tipo de núcleo. En paneles sándwich con núcleo de nido de abeja, el daño consiste en la deformación o aplastamiento del núcleo. También el daño puede consistir en la deformación de la pared de las celdas en una región cercana al punto de impacto. En muchas estructuras de nido de abeja, las paredes de las celdas son gruesas por lo que no se produce fallo por inestabilidad aunque sí por fractura, (Abrate, 1998). En un panel con núcleo de espuma, el daño que se produce debido a un impacto de baja velocidad tiene forma de depresión. Tras el impacto, la interfase entre el núcleo y la piel se separa en una región alrededor del punto de impacto y el núcleo experimenta deformaciones permanentes.

2.3.1. IMPACTO DE ALTA VELOCIDAD

Un impacto de alta velocidad se produce cuando el ratio entre la velocidad de impacto frente a la velocidad de propagación de las ondas de compresión a lo largo del espesor es mayor que la deformación de rotura en dicha dirección (Abrate, 1998). Esto implica que el daño se produce durante los primeros recorridos de las ondas de compresión, antes de que se produzca una deformación global de la estructura y por tanto, las condiciones de contorno de la estructura no tienen ninguna importancia, ya que el daño producido es muy localizado.

Los ensayos experimentales buscan simular el impacto que produce una masa pequeña con una velocidad alta. Este tipo de ensayos suelen realizarse en un cañón de gas, con proyectiles de diferentes geometrías.

Algunos de los aspectos que se pueden estudiar mediante los ensayos de alta velocidad son: el límite balístico, la velocidad residual, la energía de perforación y el modo de fallo (Kasano, 1999).

- Límite balístico: es la velocidad por debajo de la cual un proyectil específico no perfora las probetas que son impactadas.
- Velocidad residual: velocidad con la que el proyectil atraviesa la probeta y sale de ésta. A partir de la velocidad residual se puede determinar la energía absorbida por la probeta.
- Energía de perforación: es la energía mínima necesaria para provocar perforaciones en una estructura con impactos de alta velocidad. Se puede calcular experimentalmente a partir de la velocidad de impacto más baja con la que se logra atravesar las probetas, la cual depende ligeramente de la forma del proyectil utilizado y en mayor medida del espesor del laminado.
- Modo de fallo: El fallo de los materiales sometidos a ensayos de alta velocidad se produce en la zona cercana al impacto, y pueden intervenir diferentes mecanismos de fallo: delaminación, rotura de matriz y rotura de fibras.

2.3.2. IMPACTO DE BAJA VELOCIDAD

Los impactos de baja velocidad son considerados peligrosos en los materiales compuestos porque el daño que pueden producir sobre el material puede no ser detectado por inspección visual. Por este motivo es muy importante realizar estudios sobre este tipo de impactos.

En los ensayos de impacto a baja velocidad, la torre de caída es uno de los dispositivos experimentales más utilizados, pudiéndose simular impactos de baja velocidad semejantes a la realidad, como por ejemplo, la caída de una herramienta de mano sobre una estructura cuando se realizan tareas de mantenimiento o remodelación.

En este tipo de ensayos se busca representar el daño que generaría una masa grande que impacta en una estructura a baja velocidad y caracterizar el comportamiento de la estructura sándwich dependiendo de los parámetros de impacto.

El daño general que se produce en un panel sándwich debido a un impacto de baja velocidad se localiza en:

- Piel superior: El impacto de baja velocidad produce esfuerzos cortantes sobre la piel superior. Si la piel resiste la penetración, se produce un daño extenso sobre la piel impactada. También puede producirse separación entre la piel y el núcleo en zonas adyacentes al impacto.
- Núcleo: El daño que se produce en el núcleo consiste en la deformación del mismo, el fallo por cortante y la separación entre la piel y el núcleo.
- Piel inferior: Los esfuerzos de la piel superior se transmiten por el núcleo provocando esfuerzos de flexión en la piel inferior. La delaminación en la piel inferior puede ocurrir antes de la completa penetración del proyectil.

El modo de fallo de este tipo de impactos depende de las condiciones de soporte de la estructura, de la geometría del proyectil y de la geometría y las propiedades del material de la piel y del núcleo. Cuando la piel es delgada (<10 veces el espesor del núcleo), la deflexión será grande (varias veces el espesor de la piel). Cuando la piel es gruesa ($<2-5$ veces el espesor de la piel), la deflexión será pequeña (menor que el espesor de la piel).

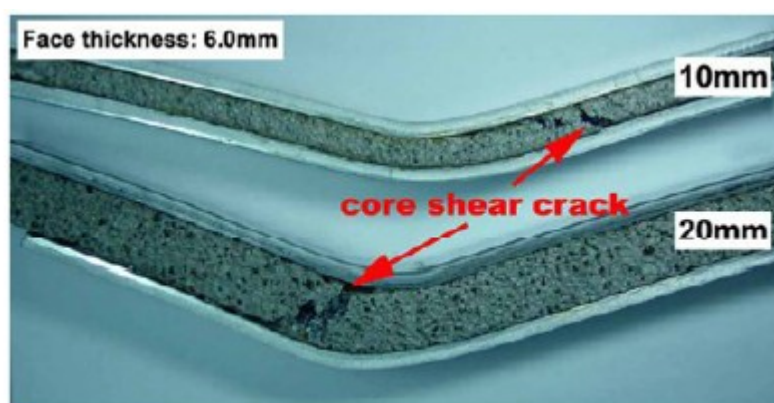


Figura 2.7 Fallo por rotura del núcleo. (J.L. Yu et al, 2008)

Para conocer el comportamiento de un panel sándwich también es importante conocer el comportamiento de los laminados más utilizados como pieles. Por ello, es interesante tener alguna referencia de estudios de diferentes laminados.

C. Akin et al. (2010) realizaron un estudio experimental sobre el comportamiento de un laminado de fibra de vidrio/epoxy sometido a un impacto de baja velocidad. Usaron diferentes laminados con distintas secuencias de apilamiento, diferentes condiciones de sustentación y energías de impacto.

Concluyeron que la estructura con cuatro lados empotrados era más estable que la estructura de dos lados empotrados, aunque se necesitaba mayor energía de impacto para perforar los laminados con dos lados empotrados.

En la Figura 2.8 se muestran algunos de los laminados ensayados por C.Akin y M.Senel:

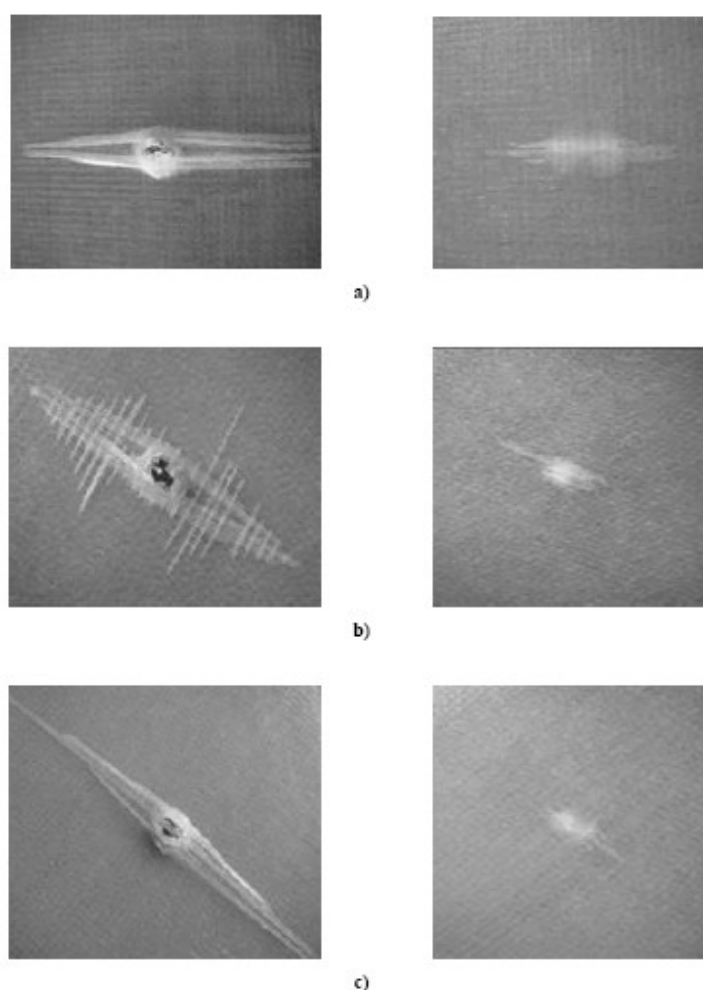


Figura 2.8 Daño producido en la cara inferior del laminado debido a impacto de baja velocidad. (C. Akin et al, 2010)
Izquierda: cuatro lados empotrados; Derecha: dos lados empotrados.
a) $[0/90]_{2s}$; b) $[-30/30]_{2s}$; c) $[-45/45]_{2s}$.

La Figura 2.8 revela que, para la misma energía de impacto, en el caso de los cuatro lados empotrados se produce penetración en el laminado mientras que para el caso de dos lados empotrados no hay penetración. Se observa también que el daño se produce en la dirección de las fibras y que para el caso de cuatro lados empotrados, la distribución del daño es mucho mayor que para el caso de dos lados empotrados.

2.4. ESTUDIO DE IMPACTOS SOBRE ESTRUCTURAS SÁNDWICH

Para entender el comportamiento de una estructura sándwich frente a impactos de baja velocidad es necesario realizar estudios sobre ello, tanto experimentales como analíticos. A continuación se exponen algunos estudios realizados por diferentes autores:

J.E. Williamson (1991) realizó un estudio experimental en el que analizaba la respuesta de un panel sándwich sometido a un impacto de baja velocidad. Los paneles sándwich ensayados estaban constituidos por las pieles, formadas por láminas de carbono-epoxy, y el núcleo de nido de abeja, de Nómex. Estudió los mecanismos de respuesta del panel sándwich para determinar el comportamiento local y global del panel. Los test de indentación estática determinaban el efecto local y los test de impacto determinaban los efectos globales de la estructura. La indentación estática consistía en analizar el núcleo y la piel por separado para determinar la contribución individual de cada uno de ellos. También se estudiaba el panel sándwich completo para analizar la combinación de ambos.

Usó diferentes configuraciones de espesor del núcleo, geometría y velocidades del proyectil, configuraciones del laminado y condiciones de soporte del panel, para determinar la carga y el daño producido en el panel en función de estos parámetros. De este estudio se obtuvieron los datos experimentales que nos servirán para comparar los resultados analíticos obtenidos en este proyecto y saber si el modelo que se está desarrollando es válido.

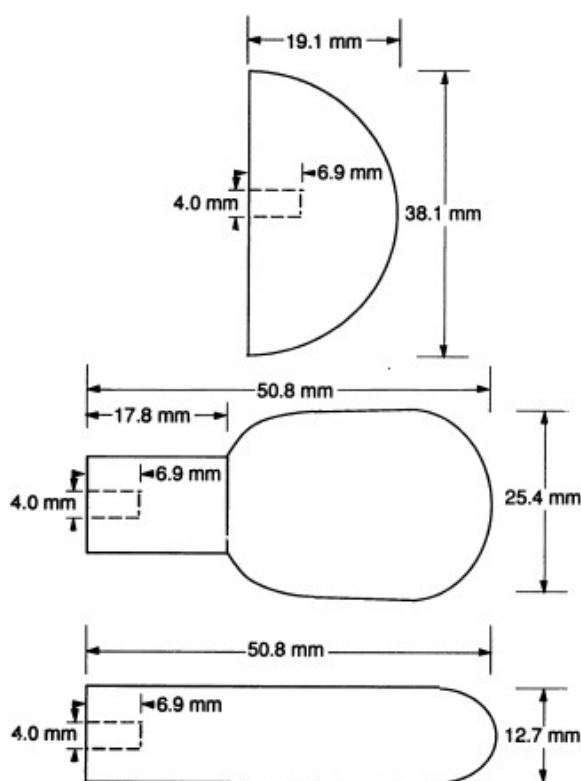


Figura 2.9 Diferentes geometrías del proyectil. (J.E. Williamson, 1991)

N.A. Aprete et al. (2006), representaron el problema de impacto de baja velocidad mediante la combinación del problema de contacto estático y la respuesta dinámica del panel sándwich.

Para analizar el comportamiento de la estructura, expresaron las propiedades del núcleo en función de su espesor, mediante un polinomio usando una combinación de las series de Fourier y Galerkin. Distinguieron dos casos diferentes en la distribución de las propiedades del núcleo: simétrico lineal sobre el plano medio del núcleo y asimétrico lineal.

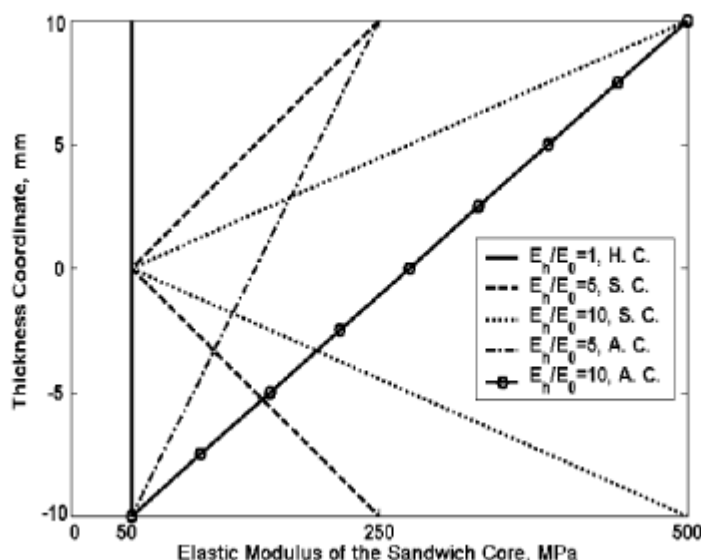


Figura 2.10 Variación del módulo de elasticidad del núcleo en función a su espesor.
(H.C: Núcleo homogéneo. S.C: Núcleo simétrico. A.C: Núcleo asimétrico. (N.A. Aprete et al, 2006)

Dividieron la viga sándwich en cuatro elementos, analizando cada uno de ellos por separado: piel superior, mitad superior del núcleo, mitad inferior del núcleo y piel inferior.

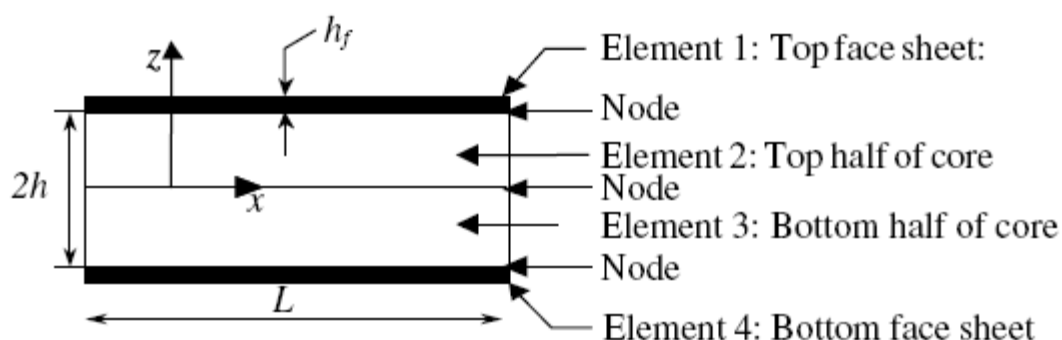


Figura 2.11 Viga sándwich dividida en cuatro elementos. (N.A. Aprete et al, 2006)

Las ecuaciones de elasticidad se formulan por separado para cada elemento y se analizan los desplazamientos y tensiones en cada nodo.

Para el problema de impacto usaron un modelo simple basado en el comportamiento cuasi estático del panel. La viga sándwich es modelada como una combinación de dos muelles: un muelle lineal que tiene en cuenta la deformación global del panel y un muelle no lineal que representa el efecto de la indentación local.

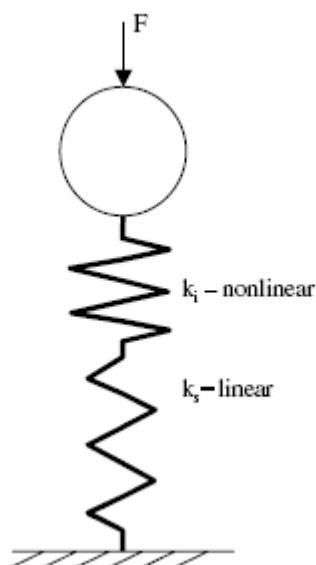


Figura 2.12 Modelo de impacto de baja velocidad. (N.A. Aprete et al, 2006)

Tras el estudio analítico, concluyeron que las tensiones máximas que se producen en el panel tras un impacto decrecen conforme al aumento del módulo de Young del núcleo y que la tensión máxima correspondiente a la carga máxima de impacto en un panel con el núcleo asimétrico es menor que para un núcleo simétrico. Esto es debido a que el núcleo asimétrico es más rígido en una región más grande en la vecindad de contacto en comparación con el núcleo simétrico.

C.C. Foo et al. (2008) realizaron un estudio mediante un programa de elementos finitos para predecir la respuesta de fallo de un panel sándwich con un núcleo de nido de abeja de aluminio. Además usaron un modelo que incluía el balance de energías y la Ley de conservación del momento para obtener la curva carga-deformación y determinar los efectos de la variación de diferentes parámetros geométricos sobre la estructura.

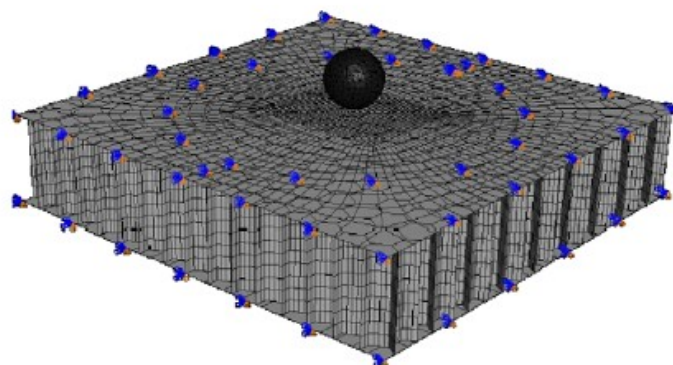


Figura 2.13 Modelo tridimensional de panel sándwich. (C.C Foo et al, 2008)

El modelo dinámico que plantearon consistía en un sistema de dos grados de libertad con masas, que representan las masas del proyectil y del panel sándwich, y resortes, que representan la rigidez de la piel superior y del panel, cuyos valores obtuvieron a partir del análisis de elementos finitos.

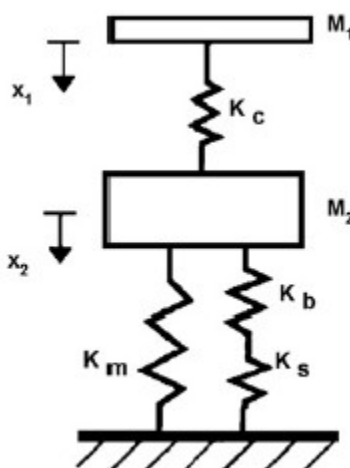


Figura 2.14 Modelo dinámico de dos grados de libertad. (C.C Foo et al, 2008)

El estudio paramétrico predijo que la energía absorbida durante el impacto es independiente de la densidad del núcleo. Sin embargo, los paneles con núcleos de alta densidad experimentaron poco daño en el núcleo y en la piel impactada. Esto implica que un núcleo con alta densidad y gran espesor tendrá una mayor tolerancia al daño. El estudio también predijo que pequeños tamaños de las celdas del núcleo mejoran la tolerancia al daño del núcleo.

T. Anderson et al. (2000) realizaron una investigación experimental sobre impacto de baja velocidad en estructuras sándwich con piel de carbono/epoxy y núcleos de espuma y nido de abeja. Realizaron diferentes ensayos variando la configuración del laminado: 0/90/0 (laminado fino) y 0₂/90₂/0₂ (laminado grueso) y la densidad del núcleo.

Determinaron que para un panel con laminado fino y núcleo de espuma, la energía necesaria para producir daño en el panel es de 8,5 J, aunque para un núcleo de espuma de alta densidad y un laminado grueso, se requiere más energía para generar el mismo daño en la estructura. Para producir daño en un panel con un laminado fino y núcleo de nido de abeja se necesita una energía de 8,07 J, pero para un núcleo de alta densidad y un laminado grueso son necesarios 12,5 J para producir el mismo daño en el panel.

J. Leijten et al. (2009) realizaron un estudio experimental para determinar la tolerancia al daño de estructuras sándwich que son comúnmente usadas en la construcción de aeronaves. Los paneles sándwich ensayados están formados por las pieles, que son laminados de carbono/epoxy, y un núcleo de espuma de Rohacell.

En la investigación parten de una configuración que sirve de referencia y a partir de esta configuración varían el espesor del laminado, el espesor y la densidad del núcleo y la capa de adhesivo entre la piel y el núcleo.

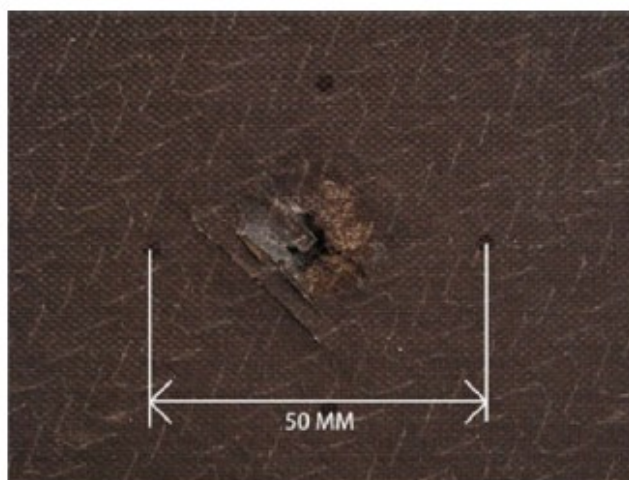


Figura 2.15 Localización del daño en la piel de un panel sándwich impactado. (J. Leijten et al, 2009)

Una de las conclusiones de esta investigación fue que una reducción del espesor de la piel o un aumento de la capa del adhesivo entre la piel y el núcleo no tiene influencia en el comportamiento de la estructura. El daño externo visible de los paneles ensayados sólo difiere de la configuración de referencia para muestras con la piel más delgada.

J.L Yu et al. (2008), realizaron una investigación para determinar la respuesta y el fallo de vigas sándwich con núcleo de espuma de aluminio sometidas a un impacto de baja velocidad. Analizaron el modo de fallo y la fuerza de contacto a partir de un modelo analítico y lo compararon con datos obtenidos a partir de ensayos experimentales. Con el modelo analítico se obtiene la carga crítica de fallo de la piel y la carga crítica de fallo del núcleo.

Identificaron tres modos de fallo para una viga sándwich con núcleo metálico: flexión de la piel, indentación y cortadura del núcleo.

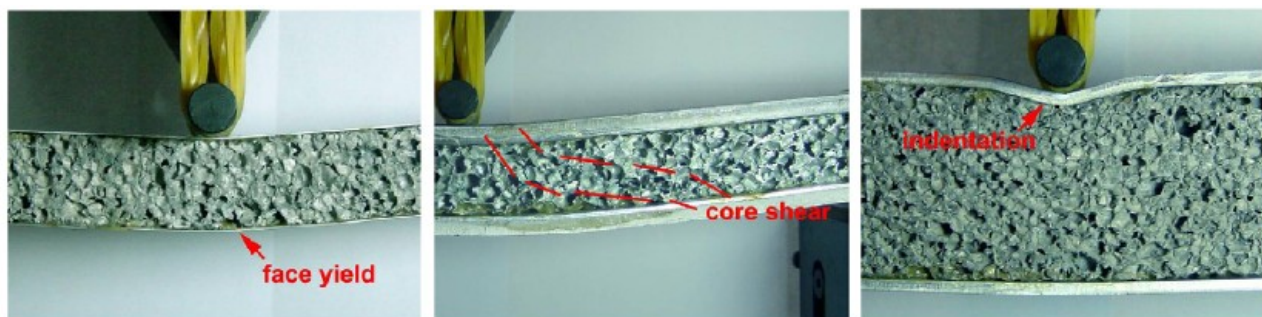


Figura 2.16 Modos de fallo observados en ensayos cuasi-estáticos. (J.L. Yu et al, 2008)

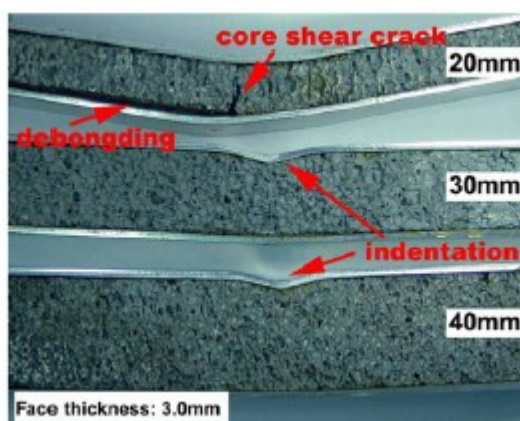


Figura 2.17 Modos de fallo observados en ensayos de impacto. (J.L. Yu et al, 2008)

El modo de fallo de la viga sándwich en un impacto dinámico es similar al producido en un ensayo cuasi estático pero la curva fuerza-desplazamiento obtenida es muy diferente en cada uno de los ensayos. Como se observa en la Figura 2.17, en el ensayo de impacto se produce también separación entre la piel y el núcleo y rotura del núcleo. Se puede predecir entonces, desde el modelo cuasi-estático, el fallo inicial de la viga.

Capítulo 3

DESCRIPCIÓN DEL MODELO ANALÍTICO

3.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo se describe de manera detallada el modelo analítico publicado por M.S. Hoo Fatt y K.S. Park en el año 2001 en el que se estudia el impacto de baja velocidad de un proyectil sobre un panel sándwich.

Primero se describe la geometría del panel sándwich que se va a estudiar y posteriormente se desarrolla el modelo analítico, en el que se diferenciará entre un estudio estático y un estudio dinámico.

El estudio dinámico consiste en representar un sistema de dos grados de libertad mediante masas, resortes y un amortiguador, simulando el impacto de un proyectil sobre un panel sándwich. Las masas representan las masas efectivas del sándwich y del proyectil, el amortiguador representa la resistencia al aplastamiento del núcleo y los resortes representan la rigidez del laminado y del panel sándwich. El estudio estático servirá para hallar el valor de la fuerza de los resortes y del amortiguador, que se ajustarán, posteriormente, con propiedades dinámicas.

3.2. GEOMETRÍA DEL PANEL SÁNDWICH

En los estudios sobre impacto de baja velocidad, tanto la geometría como las condiciones de contorno del panel sándwich serán importantes, ya que la respuesta de la estructura dependerá en gran medida de estas variables.

El panel sándwich que se va a analizar es de dimensiones $a \times b$, con una piel formada por un laminado de espesor h y un núcleo de espesor H , como se muestra en la Figura 3.1.

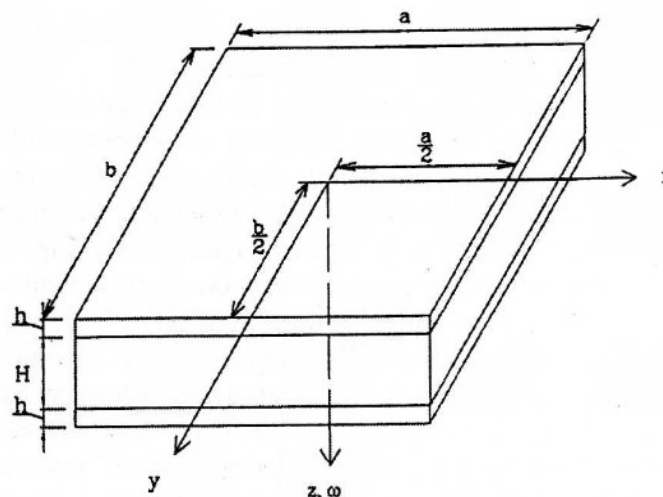


Figura 3.1 Geometría del panel sándwich. (M.S Hoo Fatt et al, 2001)

Los panel sándwich que se estudiarán serán simétricos y están empotrados en dos de sus lados más cortos. El indentador que chocará con el panel sándwich se considera que es un proyectil rígido de cabeza cilíndrica de radio R y longitud l .

3.3. INDENTACIÓN ESTÁTICA

El objetivo del estudio estático del panel sándwich es obtener los valores de rigidez del laminado y del panel y la resistencia de aplastamiento del núcleo, que se usarán posteriormente en el estudio dinámico. Para ello, se diferencia entre deformación local y deformación global.

La deformación local consiste en la deformación de la piel superior y el aplastamiento del núcleo. La deformación global consiste en la deformación por flexión y deformación por cortante del panel sándwich cuando este no ha experimentado ninguna indentación local de la piel ni aplastamiento del núcleo.

En realidad, la deformación local y la deformación global están asociadas. Cuando el indentador aplasta el núcleo durante la deformación local, la resistencia del núcleo se reduce provocando que la rigidez global del panel sea menor que la calculada para el panel aún sin deformar. Este efecto será despreciado a la hora de calcular la deformación global del panel sándwich, es decir, se considera que la deformación local y la deformación global son independientes.

La deformación total del panel sándwich será la suma de la deformación local y la deformación global del panel sándwich.

3.3.1. DEFORMACIÓN LOCAL

Se consideran que la deformación local consiste en la deflexión transversal de la piel superior y al aplastamiento del núcleo. La indentación local es modelada considerando un indentador rígido presionando sobre una membrana ortótropa (piel) apoyada sobre una base rígida-plástica (núcleo) (Regímen III de la Figura 2.4).

Se asume que la deformación local es debida a la indentación y tiene la forma:

$$\delta(x, y) = \begin{cases} \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)} - W & 0 < x^2 + y^2 < \rho^2 \\ \delta_0 \cdot \left(1 - \frac{x - \rho}{\xi - \rho}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{y - \rho}{\xi - \rho}\right)^2 & \rho^2 < x^2 + y^2 < \xi^2 \end{cases} \quad (3.1)$$

donde:

- δ_0 es la deflexión bajo el indentador.
- ξ es la extensión lateral de la zona deformada.
- R es el radio del indentador.
- ρ es la zona de contacto bajo el indentador.
- $W = R - \delta_0$.

La ecuación 3.1 se obtiene a partir de la geometría de la deformación local debida a un impacto. La deformación local para los puntos en el que el proyectil no está en contacto con el panel, es una expresión geométrica dada por Fatt y Park que representa la forma de la deformación.

La deformación local del panel sándwich debida a un impacto se representa en la siguiente figura:

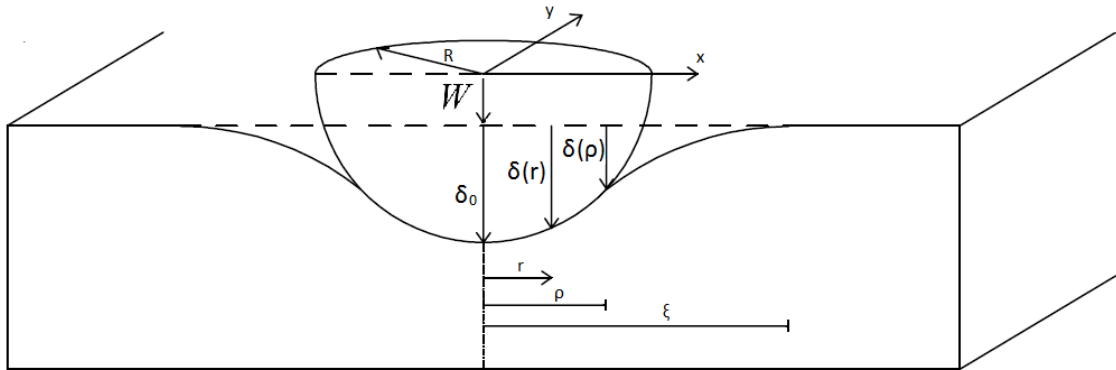


Figura 3.2. Deformación local del panel sándwich.

A continuación se analiza la zona de contacto bajo el proyectil y se obtiene la deflexión para los diferentes puntos de contacto entre el proyectil y el panel.

La zona de mayor deformación se producirá en el punto medio del proyectil en contacto con la piel superior del panel. Esta deformación se obtiene a partir de la Figura 3.3:

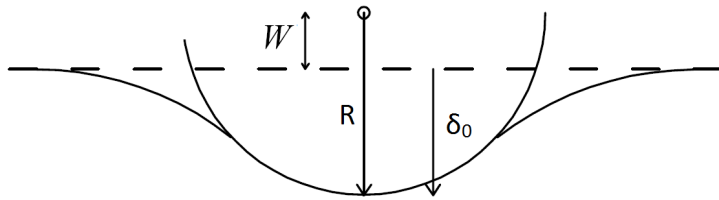


Figura 3.3 Deflexión en $x^2 + y^2 = 0$

$$\delta_0 = \sqrt{R^2 - W} = R - W \quad (3.2)$$

Todos los puntos que se encuentran desde el punto medio del proyectil hasta la zona en la que el proyectil deja de tener contacto con la piel superior del panel se representan mediante el vector r , que tomará valores entre 0 y ρ . La deformación local en todos estos puntos será la dada en la ecuación 3.3, que se obtiene a partir de la Figura 3.4:

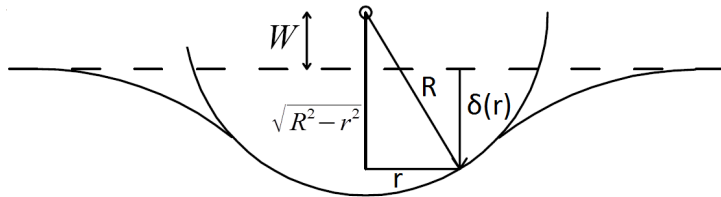
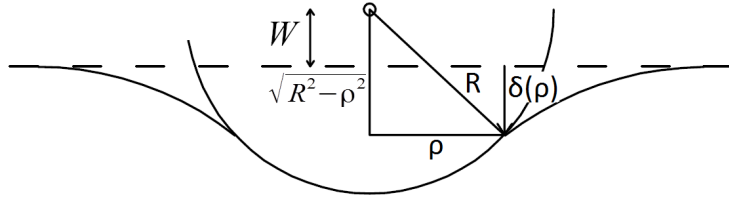


Figura 3.4 Deflexión en $x^2 + y^2 = r^2$

$$\delta_{(r)} = \sqrt{R^2 - r^2} - W \quad (3.3)$$

En el punto extremo en el que el proyectil hace contacto con la piel superior, la deformación local será la dada por la ecuación 3.4:



$$\delta_{(\rho)} = \sqrt{R^2 - \rho^2} - W \quad (3.4)$$

Figura 3.5 Deflexión en $x^2 + y^2 = \rho^2$

Para todos los puntos que se ha analizado anteriormente, la deformación local se puede expresar en función del punto de contacto entre el proyectil y el panel:

$$\delta(x, y) = \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)} - W \quad (3.5)$$

Para obtener la curva fuerza-indentación se usará el principio de la energía potencial mínima. La energía potencial de un sólido se compone de los siguientes tres términos:

$$\Pi = U + D + W \quad (3.6)$$

donde:

- U es la energía elástica debida a la flexión.
- D es el trabajo debido a la resistencia del núcleo.
- V es el trabajo debido a la fuerza de indentación.

3.3.1.1. ENERGÍA ELÁSTICA DEBIDA A FLEXIÓN, U.

La energía elástica debida a flexión es:

$$U = \frac{1}{2} \int_s \{N^T\} \{\epsilon\} dS \quad (3.7)$$

donde:

- N^T : esfuerzos en el plano.
- ϵ : deformaciones en el plano.

$$\{N^T\} = \int_{(-h/2)}^{(h/2)} \{\sigma\} dz \quad (3.8)$$

$$\{\epsilon\} = \{\epsilon^o\} + z \{k\} \quad (3.9)$$

Las tensiones en el laminado son:

$$\{\sigma\}_i = [\bar{Q}] \cdot \{\varepsilon\} \quad (3.10)$$

La matriz de rigidez plana y matriz de rigidez de acoplamiento son:

$$[A] = \int_{(-h/2)}^{(h/2)} [\bar{Q}]_i \cdot dz \quad (3.11)$$

$$[B] = \int_{(-h/2)}^{(h/2)} [\bar{Q}]_i \cdot z \cdot dz \quad (3.12)$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.9), (3.10), (3.11) y (3.12) en la ecuación (3.8) se obtiene la siguiente ecuación:

$$\{N^T\} = [A] \cdot \{\varepsilon^o\} + [B] \cdot \{k\} \quad (3.13)$$

El laminado del panel sándwich que se analiza es simétrico por lo que la matriz de rigidez de acoplamiento es nula. Finalmente se tiene:

$$\{N^T\} = [A] \cdot \{\varepsilon^o\} \quad (3.14)$$

donde:

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{61} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} \end{bmatrix} \quad y \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \varepsilon_y^o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial \delta}{\partial x} \frac{\partial \delta}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

$$(3.16)$$

Sustituyendo la ecuación (3.14) en la ecuación (3.7) se tiene:

$$U = \frac{1}{2} \int_s A_{11} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta}{\partial x} \right)^2 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta}{\partial x} \right)^2 + A_{12} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta}{\partial y} \right)^2 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta}{\partial x} \right)^2 + A_{21} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta}{\partial x} \right)^2 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta}{\partial y} \right)^2 + A_{22} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta}{\partial y} \right)^2 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta}{\partial y} \right)^2 + A_{66} \cdot \left(\frac{\partial \delta}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \delta}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \delta}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \delta}{\partial x} \right) dS \quad (3.17)$$

Simplificando la ecuación (3.17) se obtiene la energía elástica en función de la matriz de rigidez plana del laminado y las derivadas parciales de la deformación local respecto de las coordenadas x e y:

$$U = \frac{1}{8} \int_s A_{11} \cdot \left(\frac{\partial \delta}{\partial x} \right)^4 + 2A_{12} \cdot \left(\frac{\partial \delta}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{\partial \delta}{\partial y} \right)^2 + A_{22} \cdot \left(\frac{\partial \delta}{\partial y} \right)^4 + 4A_{66} \cdot \left(\frac{\partial \delta}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{\partial \delta}{\partial y} \right)^2 dS \quad (3.18)$$

La energía elástica se define en dos regiones:

- Superficie en contacto con el proyectil (S1), que se puede calcular según:

$$\int_{S1} dS = \int_0^{(2\pi)} \int_0^{\rho} r \, dr \, d\theta$$

Las derivadas parciales de la deformación local respecto a las coordenadas x e y para la región de contacto entre el proyectil y el panel son:

$$\frac{\partial \delta}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}} \quad \frac{\partial \delta}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}} \quad (3.19)$$

$$(3.20)$$

Es necesario realizar el cambio de variable a las ecuaciones (3.19) y (3.20) para expresar la energía elástica en función de r :

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad x = r \cdot \cos \theta \quad y = r \cdot \sin \theta$$

Realizando el cambio de variable y sustituyendo las ecuaciones (3.19) y (3.20) en la ecuación (3.18) se obtiene la energía elástica en la región S1:

$$U_1 = \frac{1}{8} \int_0^{(2\pi)} \int_0^{\rho} A_{11} \left(\frac{r \cdot \cos \theta}{\sqrt{R^2 - r^2}} \right)^4 + A_{22} \left(\frac{r \cdot \sin \theta}{\sqrt{R^2 - r^2}} \right)^4 + (2A_{12} + 4A_{66}) \left(\frac{r \cdot \cos \theta}{\sqrt{R^2 - r^2}} \right)^2 \left(\frac{r \cdot \sin \theta}{\sqrt{R^2 - r^2}} \right)^2 r \, dr \, d\theta \quad (3.21)$$

- Superficie fuera de contacto con el proyectil (S2), que se puede calcular según:

$$\int_{S2} dS = 4 \cdot \int_{\rho}^{\xi} \int_{\rho}^{\xi} dx \, dy$$

Calculando la energía elástica (ecuación 3.18) en la región S2 se obtiene:

$$U_2 = \frac{1}{2} \int_{\rho}^{\xi} \int_{\rho}^{\xi} A_{11} \cdot \left(\frac{\partial \delta}{\partial x} \right)^4 + A_{22} \cdot \left(\frac{\partial \delta}{\partial y} \right)^4 + (2A_{12} + 4A_{66}) \cdot \left(\frac{\partial \delta}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{\partial \delta}{\partial y} \right)^2 dx \, dy \quad (3.22)$$

donde las derivadas parciales de la deformación local respecto de las coordenadas x e y para esta región son:

$$\frac{\partial \delta}{\partial x} = \frac{-2\delta_0}{(\xi - \rho)} \left[1 - \frac{x - \rho}{\xi - \rho} \right] \cdot \left[1 - \frac{y - \rho}{\xi - \rho} \right]^2 \quad \frac{\partial \delta}{\partial y} = \frac{-2\delta_0}{(\xi - \rho)} \left[1 - \frac{y - \rho}{\xi - \rho} \right] \cdot \left[1 - \frac{x - \rho}{\xi - \rho} \right]^2 \quad (3.23)$$

$$(3.24)$$

La energía elástica total es la suma de la energía elástica en las dos regiones definidas anteriormente. Resolviendo y sumando las ecuaciones (3.21) y (3.22) se obtiene:

$$U = C_1 \left[\frac{\rho^4}{2(R^2 - \rho^2)} + \rho^2 + R^2 \ln \left(1 - \frac{\rho^2}{R^2} \right) \right] + C_1 \frac{\delta_0^4}{(\zeta - \rho)^2} \quad (3.25)$$

donde C_1 es una constante del material que se puede determinar a partir de la ecuación (3.26):

$$C_1 = 8 \left[\frac{(A_{11} + A_{22})}{45} + \frac{(2A_{12} + 4A_{66})}{49} \right] \quad (3.26)$$

3.3.1.2. TRABAJO PLÁSTICO DEBIDO AL APLASTAMIENTO DEL NÚCLEO, D .

El trabajo plástico debido al aplastamiento del núcleo es:

$$D = \int_s q \cdot \delta \, dS \quad (3.27)$$

donde: q : Resistencia al aplastamiento del núcleo.
 δ : Deflexión, definida en la ecuación (3.1).

El trabajo plástico se define en dos regiones:

- Superficie en contacto con el proyectil (S1), que se puede calcular según:

$$\int_{S1} dS = \int_0^{(2\pi)} \int_0^\rho r \, dr \, d\theta$$

Aplicando la superficie S1 a la ecuación (3.27) se obtiene:

$$D_1 = \int_0^{(2\pi)} \int_0^\rho q [\sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)} - W] r \, dr \, d\theta = 2\pi q \left[\frac{R^3}{3} - \frac{(R^2 - \rho^2)^{3/2}}{3} - \frac{\rho^2 W}{2} \right] \quad (3.28)$$

- Superficie fuera de contacto con el proyectil (S2), que se puede calcular según:

$$\int_{S2} dS = 4 \cdot \int_\rho^\zeta \int_\rho^\zeta dx \, dy$$

Aplicando la superficie S2 a la ecuación (3.27) se obtiene:

$$D_2 = 4 \cdot \int_{\rho}^{\zeta} \int_{\rho}^{\zeta} q \delta_0 \cdot \left(1 - \frac{x-\rho}{\zeta-\rho}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{y-\rho}{\zeta-\rho}\right)^2 dx dy = \frac{4}{9} q \delta_0 (\zeta - \rho)^2 \quad (3.29)$$

El trabajo plástico total es la suma del trabajo plástico en las dos regiones anteriormente definidas y se puede calcular sumando las ecuaciones (3.28) y (3.29):

$$D = 2\pi q \left[\frac{R^3}{3} - \frac{(R^2 - \rho^2)^{3/2}}{3} - \frac{\rho^2 W}{2} \right] + \frac{4}{9} q \delta_0 (\zeta - \rho)^2 \quad (3.30)$$

3.3.1.3. TRABAJO DEBIDO A LA FUERZA DE INDENTACIÓN, V.

El trabajo debido a la fuerza de indentación es:

$$V = \int_s \frac{P}{\pi \rho^2} \cdot \delta dS \quad (3.31)$$

donde P es la fuerza de indentación.

El trabajo debido a la fuerza de indentación se define sólo sobre el área proyectada de la región de contacto entre el proyectil y el laminado.

$$\int_s dS = \int_0^{(2\pi)} \int_0^{\rho} r dr d\theta$$

Aplicando la superficie definida arriba a la ecuación (3.31) se obtiene:

$$V = \int_0^{(2\pi)} \int_0^{\rho} \frac{P}{\pi \rho^2} [\sqrt{R^2 - r^2} - W] r dr d\theta = \frac{2P}{\rho^2} \left[\frac{R^3}{3} - \frac{(R^2 - \rho^2)^{3/2}}{3} - \frac{\rho^2 W}{2} \right] \quad (3.32)$$

3.3.1.4. ENERGÍA POTENCIAL MÍNIMA, Π .

El total de la energía potencial mínima se obtiene de la suma de las ecuaciones (3.25), (3.30) y (3.32) :

$$\Pi = C_1 \left[\frac{\rho^4}{2(R^2 - \rho^2)} + \rho^2 + R^2 \ln \left(1 - \frac{\rho^2}{R^2} \right) \right] + C_1 \frac{\delta_0^4}{(\zeta - \rho)^2} + 2\pi q \left[\frac{R^3}{3} - \frac{(R^2 - \rho^2)^{3/2}}{3} - \frac{\rho^2 w}{2} \right] + \frac{4}{9} q \delta_0 (\zeta - \rho)^2 + \frac{2P}{\rho^2} \left[\frac{R^3}{3} - \frac{(R^2 - \rho^2)^{3/2}}{3} - \frac{\rho^2 w}{2} \right] \quad (3.33)$$

La energía potencial es una función expresada en términos de δ_0 , ζ y ρ . El radio de contacto ρ es expresado implícitamente en una ecuación basada en la geometría del indentador cuando impacta en el panel sándwich. Esta ecuación es:

$$\frac{\rho}{\sqrt{(R^2 - \rho^2)}} = \frac{4\delta^4}{\zeta - \rho} \quad (3.34)$$

La resolución de la ecuación (3.33) debe realizarse mediante un procedimiento numérico. Una condición de equilibrio ocurre cuando $W \Pi = 0$, pero esta resolución no permite obtener una solución cerrada, por lo que a continuación se dará una solución aproximada.

3.3.2. DEFORMACIÓN LOCAL. SOLUCIÓN APROXIMADA

En este apartado se dará una solución aproximada de la deformación local debido a que no es posible encontrar una solución real cerrada.

La aproximación que se realiza consiste en asumir que la deformación local en la zona de contacto entre el proyectil y el indentador es constante. La aproximación de la deformación local de un panel sándwich debida a un impacto está representada en la Figura 3.6 y se asume que tiene la forma:

$$\delta(x, y) = \begin{cases} \delta_0 & 0 < x^2 + y^2 < Req^2 \\ \delta_0 \cdot \left(1 - \frac{x - Req}{\xi - Req}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{y - Req}{\xi - Req}\right)^2 & Req^2 < x^2 + y^2 < \xi^2 \end{cases} \quad (3.35)$$

donde:

- δ_0 es la deformación bajo el indentador.
- ξ es la extensión lateral de la zona deformada.
- R_{eq} es el radio equivalente del indentador = 0.4 R.

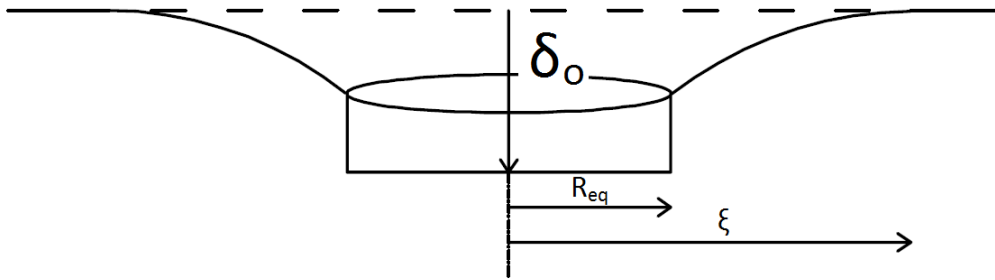


Figura 3.6 Aproximación de la deformación local de un panel sándwich bajo el proyectil.

Como se indica en la ecuación (3.35) y se observa gráficamente en la Figura 3.6, la deformación local de la zona de contacto entre el proyectil y el panel es constante. Fatt y Park asumieron, en este caso, un radio equivalente del proyectil R_{eq} .

Al igual que en el apartado 3.3.1., se calculará la energía potencial mínima para estas nuevas condiciones. Una vez obtenida, se resolverá hasta hallar la deformación en función de la fuerza de indentación.

3.3.2.1. ENERGÍA ELÁSTICA DEBIDA A FLEXIÓN, U.

La energía elástica debida a flexión está definida en la ecuación (3.7). Anteriormente se ha desarrollado esta ecuación hasta llegar a la ecuación (3.18) en la que se determina la energía elástica en función de la matriz de rigidez plana del laminado y las derivadas parciales de la deformación local respecto de las coordenadas x e y.

La energía elástica se define en dos regiones:

- Superficie en contacto con el proyectil, ($S_{1\text{-aprox}}$), que se calcula según:

$$\int_{s_1} dS = \int_0^{(2\pi)} \int_0^{Req} r \, dr \, d\theta$$

En este caso, las derivadas parciales de la deformación local respecto de las coordenadas x e y son 0, por lo que la energía elástica en la región $S_{1\text{-aprox}}$ es nula.

$$\frac{\partial \delta}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial \delta}{\partial y} = 0 \quad (3.36)$$

$$(3.37)$$

La energía elástica en la región $S_{1\text{-aprox}}$ es:

$$U_1 = 0 \quad (3.38)$$

- Superficie fuera de contacto con el proyectil ($S_{2\text{-aprox}}$), que se calcula según:

$$\int_{s_2} dS = 4 \cdot \int_{Req}^{\zeta} \int_{Req}^{\zeta} dx \, dy$$

Aplicando la superficie $S_{2\text{-aprox}}$ a la ecuación (3.18) se tiene:

$$U_2 = \frac{1}{2} \int_{Req}^{\epsilon} \int_{Req}^{\epsilon} A_{11} \cdot \left(\frac{\partial \delta}{\partial x} \right)^4 + A_{22} \cdot \left(\frac{\partial \delta}{\partial y} \right)^4 + (2A_{12} + 4A_{66}) \cdot \left(\frac{\partial \delta}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{\partial \delta}{\partial y} \right)^2 dx \, dy \quad (3.39)$$

siendo las derivadas parciales de la deformación local respecto de las coordenadas x e y para esta región:

$$\frac{\partial \delta}{\partial x} = \frac{-2\delta_0}{(\zeta - Req)} \left[1 - \frac{x - Req}{\zeta - Req} \right] \cdot \left[1 - \frac{y - Req}{\zeta - Req} \right]^2 \quad \frac{\partial \delta}{\partial y} = \frac{-2\delta_0}{(\zeta - Req)} \left[1 - \frac{y - Req}{\zeta - Req} \right] \cdot \left[1 - \frac{x - Req}{\zeta - Req} \right]^2 \quad (3.40)$$

$$(3.41)$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.40) y (3.41) en la ecuación (3.39) y resolviendo la integral se obtiene la energía elástica total, ya que la contribución de la energía elástica en la superficie de contacto con el proyectil es nula:

$$U = C_1 \frac{\delta_0^4}{(\zeta - Req)^2} \quad (3.42)$$

donde C_1 es una constante del material, que está definida en la ecuación (3.26).

3.3.2.2. TRABAJO PLÁSTICO DEBIDO AL APLASTAMIENTO DEL NÚCLEO, D.

El trabajo plástico debido al aplastamiento del núcleo está definido en la ecuación (3.27) y se define en dos regiones:

- Superficie en contacto con el proyectil, ($S_{1\text{-aprox}}$), que se calcula según:

$$\int_{s1} dS = \int_0^{(2\pi)} \int_0^{Req} r \, dr \, d\theta$$

Aplicando la superficie $S_{1\text{-aprox}}$ a la ecuación (3.27) se obtiene el trabajo plástico para esta superficie:

$$D_1 = \int_0^{(2\pi)} \int_0^{Req} q \, \delta_0 \, r \, dr \, d\theta = \pi q \delta_0 Req^2 \quad (3.43)$$

- Superficie en contacto con el proyectil, ($S_{2\text{-aprox}}$), que se calcula según:

$$\int_{s2} dS = 4 \cdot \int_{Req}^{\zeta} \int_{Req}^{\zeta} dx \, dy$$

Aplicando la superficie $S_{2\text{-aprox}}$ a la ecuación (3.27) se obtiene:

$$D_2 = 4 \cdot \int_{Req}^{\zeta} \int_{Req}^{\zeta} q \delta_0 \cdot \left(1 - \frac{x - Req}{\zeta - Req}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{y - Req}{\zeta - Req}\right)^2 dx \, dy = \frac{4}{9} q \delta_0 (\zeta - Req)^2 \quad (3.44)$$

3.3.2.3. TRABAJO DEBIDO A LA FUERZA DE INDENTACIÓN, V.

El trabajo debido a la fuerza de indentación está definido en la ecuación (3.31) y se define sólo sobre el área proyectada de la región de contacto entre el indentador y el laminado, que en este caso es:

$$\int_s dS = \int_0^{(2\pi)} \int_0^{Req} r \, dr \, d\theta$$

Aplicando la superficie de contacto definida arriba a la ecuación (3.31) se obtiene:

$$V = \int_0^{(2\pi)} \int_0^{Req} \frac{P}{\pi Req^2} \delta_0 \, r \, dr \, d\theta = P \delta_0 \quad (3.45)$$

3.3.2.4. ENERGÍA POTENCIAL MÍNIMA, II.

El total de la energía potencial se obtiene de la suma de las ecuaciones (3.42), (3.43), (3.44) y (3.45):

$$\Pi = C_1 \frac{\delta_0^4}{(\zeta - Req)^2} + \pi q \delta_0 Req^2 + \frac{4}{9} q \delta_0 (\zeta - Req)^2 + P \delta_0 \quad (3.46)$$

La energía potencial total es una función que depende de la deformación, la longitud lateral de la deformación y el radio equivalente del indentador.

Derivando la ecuación (3.46) respecto a la deflexión, obtenemos la fuerza de indentación en función de la deformación, la longitud lateral de deformación y el radio equivalente del indentador.

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \delta_0} = 0 \quad P = 4 \frac{C_1 \delta_0^3}{(\zeta - Req)^2} + \pi q Req^2 + \frac{4}{9} q (\zeta - Req)^2 \quad (3.47)$$

Derivando la ecuación (3.47) respecto a la longitud lateral de deformación, obtenemos una relación entre la deformación y la longitud lateral de deformación.

$$\frac{\partial P}{\partial \zeta} = 0 \quad \delta_0 = \sqrt[3]{\frac{q(\zeta - Req)^4}{9 C_1}} \quad (3.48)$$

Sustituyendo la ecuación (3.48) en la ecuación (3.47) se puede despejar la longitud lateral de deformación:

$$\zeta = Req + \sqrt{\frac{9(P - \pi q Req^2)}{8q}} \quad (3.49)$$

Sustituyendo la ecuación (3.49) en la ecuación (3.48) se obtiene la deformación local de la piel superior en función de la fuerza de indentación:

$$\delta_0 = \sqrt[3]{\frac{9(P - \pi q Req^2)^2}{64C_1q}} \quad (3.50)$$

3.3.3. DEFORMACIÓN GLOBAL

La deformación global es debida a la deformación por flexión y cortante del panel sándwich cuando este no ha experimentado ninguna indentación local de la piel ni aplastamiento del núcleo.

Como se ha mostrado anteriormente, en el apartado 3.2., el panel sándwich es considerado como una viga ancha de dimensiones $a \times b$, donde b es el ancho de la viga. El panel está empotrado a lo largo del ancho de la viga.

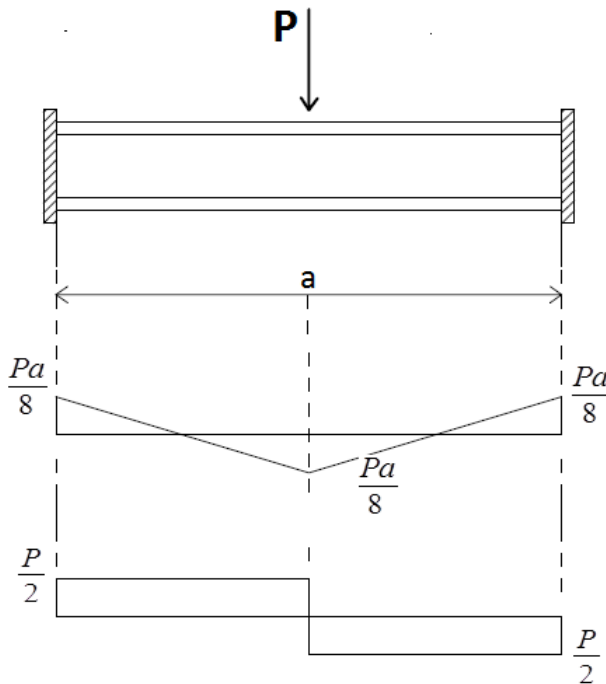
La deformación global del panel sándwich, Δ , se calcula sumando la contribución de la deformación por flexión, Δ_b , más la deformación por cortante, Δ_s .

Para calcular estas deformaciones se puede usar el T^a de Castigliano:

$$\Delta = \frac{\partial U}{\partial P} \quad (3.51)$$

donde: U es la energía elástica de deformación.
 P es la fuerza de indentación.

A continuación se muestra la ley de momentos flectores y esfuerzos cortantes que se producirían en el panel sándwich debido a una fuerza de indentación P .



Ley de momentos flectores

$$M_{max} = \frac{Pa}{8} \quad (3.52)$$

$$Mf = \frac{Pa}{8} - \frac{P}{2}x \quad (3.53)$$

Ley de esfuerzos cortantes

$$Q = \frac{P}{2} \quad (3.54)$$

Figura 3.7 Indentación global del panel sándwich. Ley de momentos flectores y esfuerzos cortantes.

Como se indica anteriormente, la deformación global se debe a la deformación por flexión, Δ_b , y a la deformación por cortante, Δ_s .

– Deformación por flexión:

La energía elástica debida a flexión de una viga como la que se muestra en la Figura 3.7 es:

$$U_b = \int_0^{(a/2)} \frac{Mf^2}{2EI} dx + \int_{(a/2)}^a \frac{Mf^2}{2EI} dx \quad (3.55)$$

Sustituyendo la ecuación (3.53) en la ecuación (3.55) y resolviendo la integral, se obtiene la energía elástica debida a flexión:

$$U_b = \frac{P^2 a^3}{384 EI} \quad (3.56)$$

La deformación debido a flexión se obtiene derivando la energía elástica debida a flexión respecto de P:

$$\Delta_b = \frac{\partial U_b}{\partial P} = \frac{Pa^3}{192 EI} \quad (3.57)$$

– Deformación por cortante:

La energía elástica debida a cortante de una viga como la que se muestra en la Figura 3.7 es:

$$U_s = \int_0^a \frac{Q^2}{2GA} dx \quad (3.58)$$

Sustituyendo la ecuación (3.54) en la ecuación (3.58) y resolviendo la integral, se obtiene la energía elástica debida a cortante:

$$U_s = \frac{P^2 a}{8 GA} \quad (3.59)$$

La deformación por cortante se obtiene derivando la energía elástica debida a cortante respecto de P:

$$\Delta_s = \frac{\partial U_s}{\partial P} = \frac{Pa}{4 GA} \quad (3.60)$$

Sumando las ecuaciones (3.57) y (3.60) se obtiene la deformación global total:

$$\Delta = \frac{Pa^3}{192 EI} + \frac{Pa}{4 GA} \quad (3.61)$$

Se realiza el cambio de las propiedades de resistencia de materiales:

$$EI = D_{11}^b = \frac{E_{11} b h H^2}{2} \quad (3.62)$$

$$GA = S = G_c b H \quad (3.63)$$

donde: S es la rigidez a cortadura del núcleo.
 G_c es el módulo a cortadura del núcleo.
 D_{11}^b es la rigidez a flexión de la viga sándwich.
 E_{11} es la rigidez longitudinal a flexión.
 h es el espesor total de la piel superior.

Sustituyendo las ecuaciones (3.62) y (3.63) en la ecuación (3.61), se obtiene la deformación global de un panel sándwich biempotrado debido a una fuerza de indentación P:

$$\Delta = \frac{Pa^3}{192 D_{11}^b} + \frac{Pa}{4 S} \quad (3.64)$$

Despejando P de la ecuación (3.64) se obtiene:

$$P = k_g \Delta \quad (3.65)$$

donde K_g es la rigidez estática global del panel sándwich:

$$k_g = \frac{192 D_{11}^b S}{a^3 S + 48 D_{11}^b a} \quad (3.66)$$

3.3.4. DEFORMACIÓN TOTAL

La deformación total del panel sándwich será la suma de la deformación local y la deformación global del panel sándwich, que están definidas en las ecuaciones (3.50) y (3.64).

3.4. INDENTACIÓN DINÁMICA

La respuesta dinámica de un panel sándwich biempotrado se puede modelar como un sistema discreto de dos grados de libertad como el que se muestra en la siguiente figura:

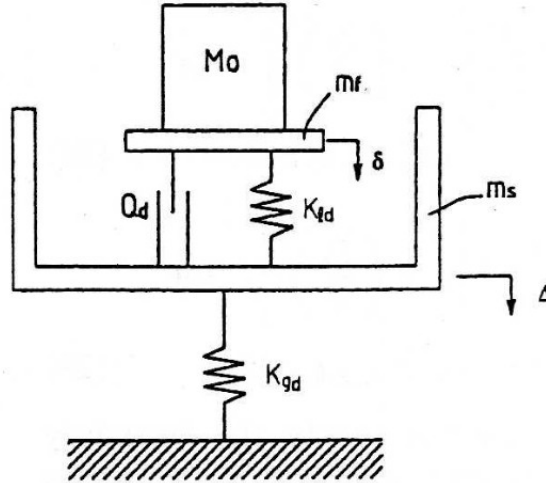


Figura 3.8 Modelo planteado de un impacto sobre un panel sándwich biempotrado. (M.S Hoo Fatt et al, 2001)

donde:

- δ es el desplazamiento local de la piel superior.
- Δ es el desplazamiento global del panel.
- Q_d es la resistencia dinámica al aplastamiento del núcleo.
- M_0 es la masa del proyectil.
- m_f es la masa efectiva de la piel.
- m_s es la masa efectiva del panel sándwich.
- K_{ld} es la rigidez dinámica local de la piel superior.
- K_{gd} es la rigidez dinámica global del panel sándwich.

El modelo de la Figura 3.8 representa el impacto de un proyectil de masa M_0 sobre un panel sándwich de masa m_s . La masa de la piel superior está representada como m_f . La rigidez dinámica local de la piel superior se representa mediante un resorte no lineal K_{ld} y la rigidez dinámica global del panel sándwich se representan como un resorte lineal K_{gd} . La resistencia dinámica al aplastamiento del núcleo se modela como un amortiguador Q_d .

Los valores de los resortes y el amortiguador representados en el modelo dinámico se obtiene a partir del estudio estático realizado previamente. Las ecuaciones para este sistema de dos grados de libertad son:

$$(M_0 + m_f)(\ddot{\Delta} + \ddot{\delta}) + P_1(\delta) + Q_d = 0 \quad (3.67)$$

$$Q_d + P_1(\delta) = m_s \ddot{\Delta} + k_{gd} \Delta \quad (3.68)$$

$P_1(\delta)$ es la fuerza de indentación local en la piel superior en función del desplazamiento sin tener en cuenta el trabajo plástico realizado por el núcleo:

$$P_1(\delta) = \frac{8\sqrt{C_{1d}q_d}}{3} \delta^{(3/2)} \quad (3.69)$$

Q_d es la resistencia dinámica al aplastamiento del núcleo:

$$Q_d = \pi R_{eq}^2 q_d \quad (3.70)$$

Las ecuaciones (3.69) y (3.70) dependen de propiedades dinámicas del material que se calcularán mas adelante.

M.S. Hoo Fatt y K.S. Park realizan varias simplificaciones al modelo planteado. La primera simplificación consiste en asumir que la rigidez local de la piel superior puede ser linealizada.

$$P_1(\delta) = k_{ld} \delta \quad (3.71)$$

A continuación realizan una segunda simplificación: consideran que la inercia del sándwich es despreciable frente la del proyectil, por lo que las masas de la piel y del sándwich pueden ser despreciadas:

$$m_f \ll M_0 \quad y \quad m_s \ll M_0$$

Aplicando estas simplificaciones a las ecuaciones (3.67) y (3.68) se tiene:

$$M_0(\ddot{\Delta} + \ddot{\delta}) + k_{ld} \delta + Q_d = 0 \quad (3.72)$$

$$Q_d + k_{ld} \delta = k_{gd} \Delta \quad (3.73)$$

Derivando dos veces la ecuación (3.73) respecto del tiempo, se obtiene:

$$k_{ld} \ddot{\delta} = k_{gd} \ddot{\Delta} \quad (3.74)$$

De esta ecuación se puede despejar $\ddot{\Delta}$ y sustituirla en la ecuación (3.72). Se obtiene así la siguiente ecuación:

$$M_0 \left(1 + \frac{k_{ld}}{k_{gd}}\right) \ddot{\delta} + k_{ld} \delta + Q_d = 0 \quad (3.75)$$

La ecuación (3.75) es una ecuación diferencial que está sujeta a las siguientes condiciones iniciales:

$$\delta(0) = 0 \quad (3.76)$$

$$\dot{\delta}(0) = \frac{k_{gd} v_0}{k_{gd} + k_{ld}} \quad (3.77)$$

En el instante $t=0$ no se ha producido desplazamiento en la piel superior. La velocidad inicial de la piel superior está definida en la ecuación (3.77) y su cálculo se desarrolla más adelante en el apartado 4.4.2.

La solución para la ecuación diferencial (3.75) es:

$$\delta = \frac{\dot{\delta}_o}{\omega} \sin \omega t + \frac{Q_d}{k_{ld}} \cos \omega t - \frac{Q_d}{k_{ld}} \quad (3.78)$$

donde:

$$\omega = \sqrt{\frac{k_{ld} k_{gd}}{(k_{ld} + k_{gd}) M_0}} \quad (3.79)$$

La fuerza de contacto entre el proyectil y la piel superior es:

$$F(t) = -M_0(\ddot{\Delta} + \ddot{\delta}) = -M_0\left(1 + \frac{k_{ld}}{k_{gd}}\right)\ddot{\delta} \quad (3.80)$$

siendo $\ddot{\delta}$ la aceleración de la piel superior, que se puede calcular derivando la ecuación (3.78) dos veces respecto del tiempo.

$$\ddot{\delta} = \frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} = -\dot{\delta}_o \cdot \sin \omega t \cdot \omega - \frac{Q_d}{k_{ld}} \cos \omega t \cdot \omega^2 \quad (3.81)$$

La máxima fuerza de impacto se produce cuando

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 0 \quad (3.82)$$

y toma el valor:

$$F_{max} = \frac{M_0}{k_{gd}} \frac{(k_{gd} + k_{ld})\omega}{\sqrt{(Q_d \omega)^2 + (\dot{\delta}_o k_{ld})^2}} \left(\dot{\delta}_o^2 k_{ld} + \frac{Q_d^2 \omega^2}{k_{ld}} \right) \quad (3.83)$$

3.4.1. CÁLCULO DE LA MASA EFECTIVA DEL SÁNDWICH Y DE LA PIEL SUPERIOR

En este apartado se calcularán las masas efectivas de la piel superior y del panel sándwich, que serán necesarios más adelante para obtener los diferentes resultados.

La masa efectiva de la piel superior puede ser calculada asumiendo que la velocidad de la piel superior tiene la forma:

$$\dot{\delta}(x, y) = \begin{cases} \dot{\delta} & 0 < x^2 + y^2 < R^2 \\ \dot{\delta} \cdot \left(1 - \frac{x-R}{\xi-R}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{y-R}{\xi-R}\right)^2 & R^2 < x^2 + y^2 < \xi^2 \end{cases} \quad (3.84)$$

La ecuación (3.84) se obtiene asumiendo que el perfil de la velocidad es similar al perfil de la deformación local de la piel superior.

La energía cinética de la piel superior cuando se produce un impacto sobre ella es:

$$KE = \frac{1}{2} m_f \dot{\delta}^2 \quad (3.85)$$

La energía cinética expresada en función de la densidad de la piel se puede escribir como:

$$KE \approx 2\rho_f h R^2 \dot{\delta}^2 + 2 \int_R^\xi \int_R^\xi \rho_f h \dot{\delta}^2 \left[1 - \frac{x-R}{\xi-R}\right]^4 \left[1 - \frac{y-R}{\xi-R}\right]^4 dx dy \quad (3.86)$$

donde ρ_f es la densidad de la piel.

Resolviendo la ecuación (3.86) se obtiene:

$$KE \approx \frac{2}{25} [25 \cdot R^2 + (R - \xi)^2] \rho_f h \dot{\delta}^2 \quad (3.87)$$

Sustituyendo la ecuación (3.85) en la ecuación (3.87) y despejando la masa de la piel superior, se obtiene la siguiente ecuación:

$$m_f \approx \frac{4R^2}{25} \left[25 + \left(1 - \frac{\xi}{R}\right)^2\right] \rho_f h \quad (3.88)$$

En un impacto de baja velocidad, la longitud de deformación es grande. Se asume que esta deformación se extiende por todo el panel en dos direcciones.

$$\xi_1 = \frac{a}{2} \quad \xi_2 = \frac{b}{2} \quad (3.89)$$

$$(3.90)$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.89) y (3.90) en la ecuación (3.88) se obtiene la masa efectiva de la piel superior:

$$m_f \approx \frac{4R^2}{25} \left[25 + \left(1 - \frac{a}{2R}\right) \left(1 - \frac{b}{2R}\right) \right] \rho_f h \quad (3.91)$$

La masa efectiva del panel sándwich es calculada para el caso en el que el panel sándwich está biempotrado. Se asume que el perfil de la velocidad del panel sándwich es similar al perfil de la deformación global del panel sándwich:

$$\dot{\Delta}(x, y) = \dot{\Delta} \left(1 - \left(\frac{2x}{a}\right)^2\right)^4 \left(1 - \left(\frac{2y}{b}\right)^2\right)^4 \quad -a/2 \leq x \leq a/2, \quad b/2 \leq y \leq b/2 \quad (3.92)$$

La energía cinética en este caso es:

$$KE = \frac{1}{2} m_s \dot{\Delta}^2 \quad (3.93)$$

La energía cinética expresada en función de la densidad del panel sándwich se puede escribir como:

$$KE \approx 2 \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \rho_s (H + 2h) \dot{\Delta}^2 \left[1 - \frac{4x^2}{a^2}\right]^8 \left[1 - \frac{4y^2}{b^2}\right]^8 dx dy \quad (3.94)$$

donde ρ_s es la densidad del panel sándwich.

Resolviendo la ecuación (3.94) se obtiene

$$KE \approx 0.045 \rho_s a b (H + 2h) \dot{\Delta}^2 \quad (3.95)$$

Sustituyendo la ecuación (3.93) en la ecuación (3.95) y despejando la masa del panel sándwich se tiene:

$$m_s = 0.09 \rho_s a b (H + 2h) \quad (3.96)$$

3.4.2. CÁLCULO DE LA VELOCIDAD INICIAL DEL SÁNDWICH Y DE LA PIEL SUPERIOR

La respuesta al impacto de un proyectil sobre un panel sándwich biempotrado es modelado por un sistema de dos grados de libertad formado por masas, muelles y amortiguadores como el que se muestra en la figura (3.9).

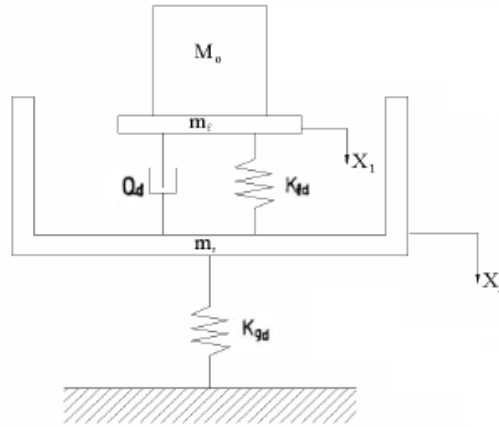


Figura 3.9 Sistema de dos grados de libertad.

\dot{X}_1 y \dot{X}_2 son las velocidades absolutas iniciales de la piel superior y del panel sándwich, respectivamente. Estas velocidades están relacionadas con la velocidad inicial de la piel superior $\dot{\delta}$ y la velocidad inicial del panel $\dot{\Delta}$.

$$\dot{\delta} = \dot{X}_1 - \dot{X}_2 \quad (3.97)$$

$$\dot{\Delta} = \dot{X}_2 \quad (3.98)$$

Si se aplican las ecuaciones de la cantidad de movimiento en la piel superior se obtiene:

$$M_0 v_0 = (M_0 + m_f) \dot{X}_1 + Q_d(\Delta t) \quad (3.99)$$

siendo v_0 la velocidad inicial del proyectil.

El movimiento es transferido instantáneamente desde la piel superior al sándwich:

$$Q_d(\Delta t) = m_s \dot{X}_2 \quad (3.100)$$

Sustituyendo la ecuación (3.99) en la ecuación (3.100) se obtiene la siguiente ecuación:

$$M_0 v_0 = (M_0 + m_f) \dot{X}_1 + m_s \dot{X}_2 \quad (3.101)$$

Realizando el equilibrio estático del sistema de la Figura 3.9 se obtiene:

$$Q_d + k_{ld} \delta = K_{gd} \Delta \quad (3.102)$$

Derivando la ecuación (3.102) respecto del tiempo y expresándolas en función de las velocidades absolutas, se tiene:

$$k_{ld} (\dot{X}_1 - \dot{X}_2) = K_{gd} \dot{X}_2 \quad (3.103)$$

De las ecuaciones (3.101) y (3.103) se puede obtener \dot{X}_1 y \dot{X}_2 .

$$\dot{X}_1 = \frac{M_0 v_0 (k_{gd} + k_{ld})}{[(M_0 + m_f)(k_{gd} + k_{ld}) + m_s k_{ld}]} \quad (3.104)$$

$$\dot{X}_2 = \frac{M_0 v_0 k_{ld}}{[(M_0 + m_f)(k_{gd} + k_{ld}) + m_s k_{ld}]} \quad (3.105)$$

Despreciando las masas de la piel superior y del panel sándwich se tiene:

$$\dot{X}_1 = v_0 \quad (3.106)$$

$$\dot{X}_2 = \frac{v_0 k_{ld}}{(k_{gd} + k_{ld})} \quad (3.107)$$

Estas velocidades son las velocidades absolutas de la piel superior y del sándwich. Como se a indicado anteriormente, estas velocidades están relacionadas con la velocidad inicial de la piel superior $\dot{\delta}_0$ y la velocidad inicial del sándwich $\dot{\Delta}_0$, según las ecuaciones (3.97) y (3.98).

Así, las velocidades iniciales de la piel superior y del panel sándwich son:

$$\dot{\delta}_0 = \dot{X}_1 - \dot{X}_2 = \frac{v_0 k_{gd}}{(k_{gd} + k_{ld})} \quad (3.108)$$

$$\dot{\Delta}_0 = \dot{X}_2 = \frac{v_0 k_{ld}}{(k_{gd} + k_{ld})} \quad (3.109)$$

Capítulo 4

COMPARACIÓN DE RESULTADOS

4.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo se reproduce el modelo analítico propuesto por M. S. Hoo Fatt y K.S. Park en el año 2001, descrito en el capítulo anterior. Para ello se ha desarrollado un programa que posteriormente se ha implementado en Matlab. Estos resultados serán comparados con los resultados analíticos de Fatt y Park, y con el estudio experimental realizado por Williamson en el año 1991, en el que realizó ensayos de impacto de baja velocidad sobre paneles sándwich.

Primero se hará una descripción del panel sándwich, donde se reflejarán sus propiedades y datos utilizados por Williamson. Posteriormente, se calcularán las propiedades macromecánicas del panel sándwich, que dependen del tipo de material utilizado.

Finalmente, se procederá a realizar la comparación entre la reproducción del modelo, el modelo analítico de Fatt y Park, y los datos experimentales obtenidos por Williamson.

4.2. DATOS EXPERIMENTALES Y DESCRIPCIÓN DEL PANEL SÁNDWICH

Williamson realizó un estudio experimental de impacto de baja velocidad sobre paneles sándwich. Estos paneles estaban constituido por las pieles, formadas por laminas de carbono-epoxy (AS4/3501-6), y el núcleo de nido de abeja, de Nómex.

Realizó ensayos de impacto de baja velocidad donde buscaban la respuesta de este material para diferentes condiciones de sustentación, velocidades del proyectil, geometrías del laminado, espesores del núcleo y diámetros del proyectil.

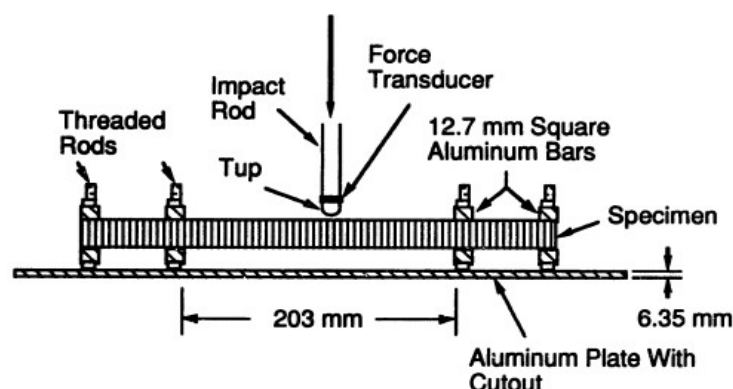


Figura 4.1 Esquema del impacto de un panel sándwich biempotrado, (J. E. Williamson, 1991).

En la siguiente tabla se muestran los distintos datos que Williamson variaba en su estudio experimental:

Datos del ensayo experimental					
Laminado	[0/90]		[0/90/0]		[0/90/0/90]
Espesor del núcleo	6.4 mm		9.5 mm		25.4 mm
Diámetro del Proyectoil	12.7 mm		25.4 mm		38.1 mm
Velocidad del proyectil	1.2 m/s	1.65 m/s	2.10 m/s	2.55 m/s	3 m/s 3.45 m/s

Tabla 4.1 Datos de ensayos de impacto, (J. E. Williamson, 1991).

Las propiedades de la piel, de cada lamina, del núcleo y del proyectil se muestran en la siguiente tabla:

Piel	
Laminado	[0/90]; [0/90/0]; [0/90/0/90]
Dimensiones	a x b = 203 x 89 mm ²
Densidad	$\rho_f = 1617.3 \text{ Kg} / \text{m}^3$
Lamina	
Módulo de elasticidad longitudinal	$E_{11} = 142 \text{ GPa}$
Módulo de elasticidad transversal	$E_{22} = 9.8 \text{ GPa}$
Módulo de elasticidad a cortadura	$G_{12} = 7.1 \text{ GPa}$
Coefficiente de Poisson principal	$\nu_{12} = 0.3$
Espesor	$h_k = 0.175 \text{ mm}$
Núcleo	
Densidad	$\rho_c = 48 \text{ Kg} / \text{m}^3$
Diámetro celda	d = 3.2 mm
Espesor	H = 6.4; 9.5; 25.4 mm
Módulo de cortadura	$G_c = 24.1 \text{ GPa}$
Resistencia aplastamiento	q = 1.389 MPa
Proyectoil	
Diámetro	D = 12.7; 25.4; 38.1 mm
Masa	$M_0 = 1.53; 1.61; 1.69 \text{ Kg}$

Tabla 4.2 Datos del panel sándwich y del proyectil, (J. E. Williamson, 1991).

La masa del proyectil varía en función de su diámetro. En la siguiente tabla se muestra la relación entre el diámetro y la masa del proyectil:

Diámetro	12.7 mm	25.4 mm	38.1 mm
Masa	1.53 Kg	1.61 Kg	1.69 Kg

Tabla 4.3 Relación entre el diámetro y la masa del proyectil, (J. E. Williamson, 1991).

4.3. CÁLCULO DE LAS PROPIEDADES ESTÁTICAS Y DINÁMICAS DEL MATERIAL

Conociendo los datos de los materiales que forman el panel sándwich, se puede obtener la matriz de rigidez plana del laminado, necesaria para calcular la curva fuerza-desplazamiento en el estudio estático a partir de las ecuaciones (3.50) y (3.64).

Una vez resuelto el estudio estático, se puede obtener a partir de él, la rigidez estática local de la piel superior y la rigidez estática global del panel sándwich. Para poder usar estos datos en el estudio dinámico, estos datos se ajustarán mediante propiedades dinámicas del material.

4.3.1. CÁLCULO DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ DEL LAMINADO

Se calcula el coeficiente de Poisson secundario y la matriz de rigidez de una lamina a 0° :

$$\nu_{21} = \nu_{12} \frac{E_2}{E_1} \quad (4.1)$$

$$[Q] = [\overline{Q}]^{0^\circ} = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_2 \nu_{12}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ \frac{E_1 \nu_{21}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

A partir de la matriz de rigidez de una lamina a 0° se calcula la matriz de rigidez de una lamina a 90° :

$$[\overline{Q}]^{90^\circ} = \begin{bmatrix} \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_2 \nu_{12}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ \frac{E_1 \nu_{21}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

Conociendo las matrices de rigidez de las laminas a 0° y 90° se obtiene la matriz rigidez plana del laminado:

$$[A] = \sum_i^N [\overline{Q}]_i h_k \quad (4.4)$$

4.3.1.1. CÁLCULO DE LAS PROPIEDADES DINÁMICAS DEL PANEL SÁNDWICH

Para encontrar la respuesta dinámica al impacto de un panel sándwich desde la ecuación (3.80), se debe calcular la rigidez dinámica local de la piel, la rigidez dinámica global del panel y la resistencia dinámica al aplastamiento del núcleo.

La rigidez estática local sin linealizar de la piel superior y la resistencia estática al aplastamiento del núcleo se obtienen a partir de la relación entre la fuerza de indentación y la deformación local de la piel superior (ecuación 3.50). La rigidez estática global del panel está definida en la ecuación (3.66)

La rigidez estática local sin linealizar de la piel superior es:

$$k_l = \frac{8\sqrt{C_1 q}}{3} \quad (4.5)$$

La resistencia estática al aplastamiento del núcleo es:

$$Q = \pi R_{eq}^2 q \quad (4.6)$$

Harding et al. (1989), realizaron diversos estudios en los que llegaron a la conclusión que las propiedades dinámicas del laminado AS4/3501-6 carbono-epoxi se asemejan a las propiedades estáticas. Se puede asumir entonces que:

$$A_{11d} = A_{11} \quad \rightarrow \quad C_{1d} = C_1$$

Sin embargo, Goldsmith et al. (1991), encontraron que la resistencia dinámica al aplastamiento del núcleo de Nómex es un 10% mayor que la resistencia estática al aplastamiento del núcleo en un impacto de baja velocidad y que este 10% no varía con la velocidad de impacto. Por lo tanto, se asume que:

$$q_d = 1.1q$$

Así, la rigidez dinámica local de la piel superior sin linealizar y la resistencia dinámica al aplastamiento del núcleo son:

$$k_{ld} = \frac{8\sqrt{C_{1d} q_d}}{3} \quad (4.7)$$

$$Q_d = \pi R_{eq}^2 q_d \quad (4.8)$$

La rigidez dinámica global del panel sándwich es:

$$k_{gd} = \frac{192 D_{11}^b S}{a^3 S + 48 D_{11}^b a} \quad (4.9)$$

Como se ha descrito en el apartado 3.4, en el modelo dinámico se linealiza la rigidez dinámica local de la piel superior para obtener el cálculo de la curva fuerza de contacto-tiempo. M.S. Fatt y K.S. Park no aclaran en su estudio como linealizan este término.

A continuación se linealiza este término mediante la representación gráfica de la curva fuerza-desplazamiento (ecuación 3.50) y ajustando posteriormente la curva obtenida.

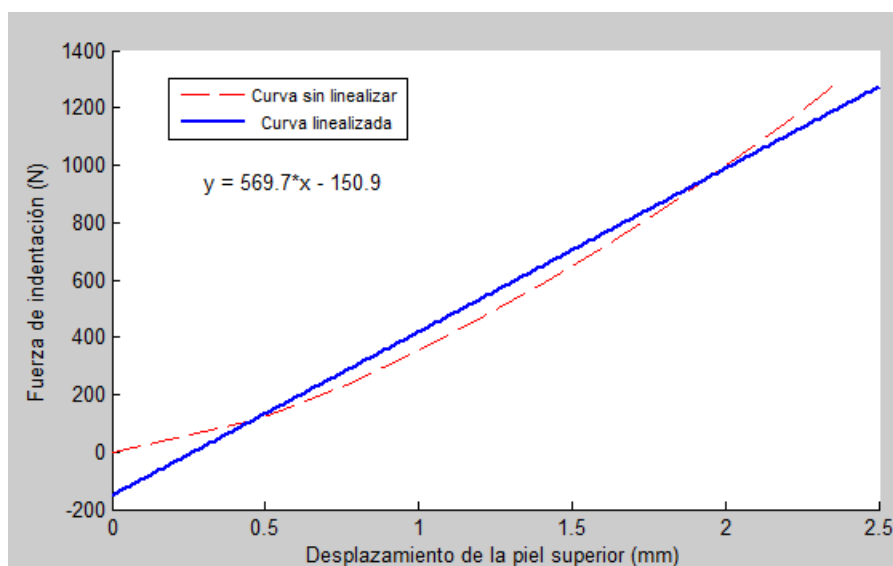


Figura 4.2 Curva fuerza de indentación - desplazamiento local. Linealización 1. Laminado [0/90]

En la Figura 4.2 se realiza la linealización para valores de P desde 0 a 1200 N, con el que obtenemos un valor de la rigidez dinámica de 569.7 N/mm. Se realiza una segunda linealización reajustando los valores de P, obteniendo una rigidez dinámica de 528.4 N/mm, como se muestra en la Figura 4.3.

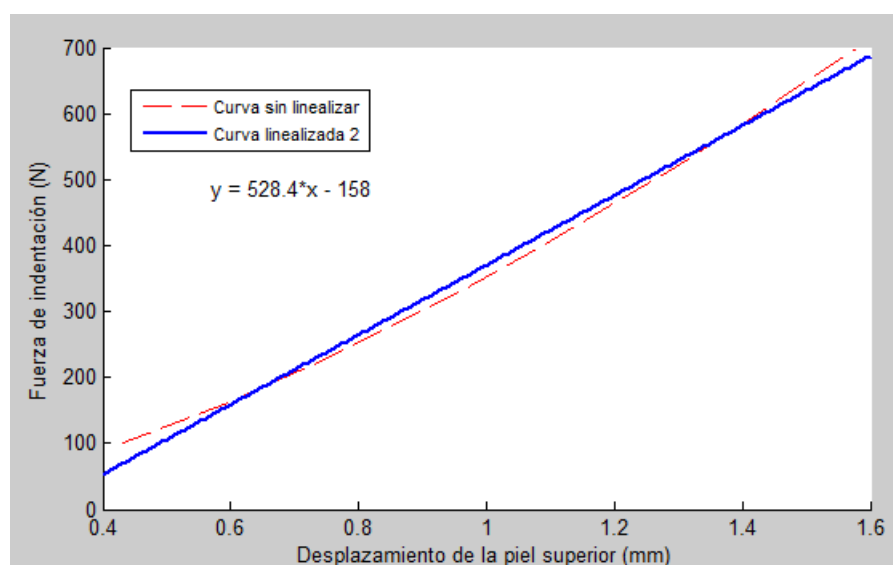


Figura 4.3 Curva fuerza de indentación - desplazamiento local. Linealización 2. Laminado [0/90]

4.4. COMPARACIÓN DE RESULTADOS

En este apartado se comparan los resultados de la reproducción del modelo analítico descrito en el capítulo 3 con los resultados analíticos obtenidos por M. S. Hoo Fatt y K.S. Park y los datos experimentales de Williamson.

Para distinguir cada una de las soluciones que se darán en las gráficas de este capítulo, estas se llamarán de la siguiente forma:

1. La solución analítica de M. S. Hoo Fatt y K.S. Park se llamará "Sol. Fatt-Park".
2. Los resultados experimentales de Williamson se llamarán "Datos experimentales".
3. La reproducción del modelo analítico se llamará "Sol. Reproducción del modelo".

Primero se comparará el modelo estático, diferenciando entre deformación local y deformación total. Una vez validado el modelo estático y comprobando que la solución analítica encontrada es similar o mejor a la dada por Fatt y Park, se comparará el modelo dinámico.

4.4.1. RESPUESTA ESTÁTICA

A continuación se mostrará la curva fuerza-desplazamiento tanto para la deformación local del laminado como para la deformación total del panel sándwich.

El panel sándwich que se va a analizar y comparar tiene un laminado [0/90] y un espesor del núcleo de 25.4 mm. El panel está empotrado en dos de sus lados más cortos y el diámetro del proyectil es de 25.4 mm.

La deformación local se obtiene a partir de la ecuación (3.50). La deformación total se obtiene de la suma de las ecuaciones (3.50) y (3.64).

4.4.1.1. DEFORMACIÓN LOCAL

El desplazamiento local de la piel superior se muestra en la siguiente figura:

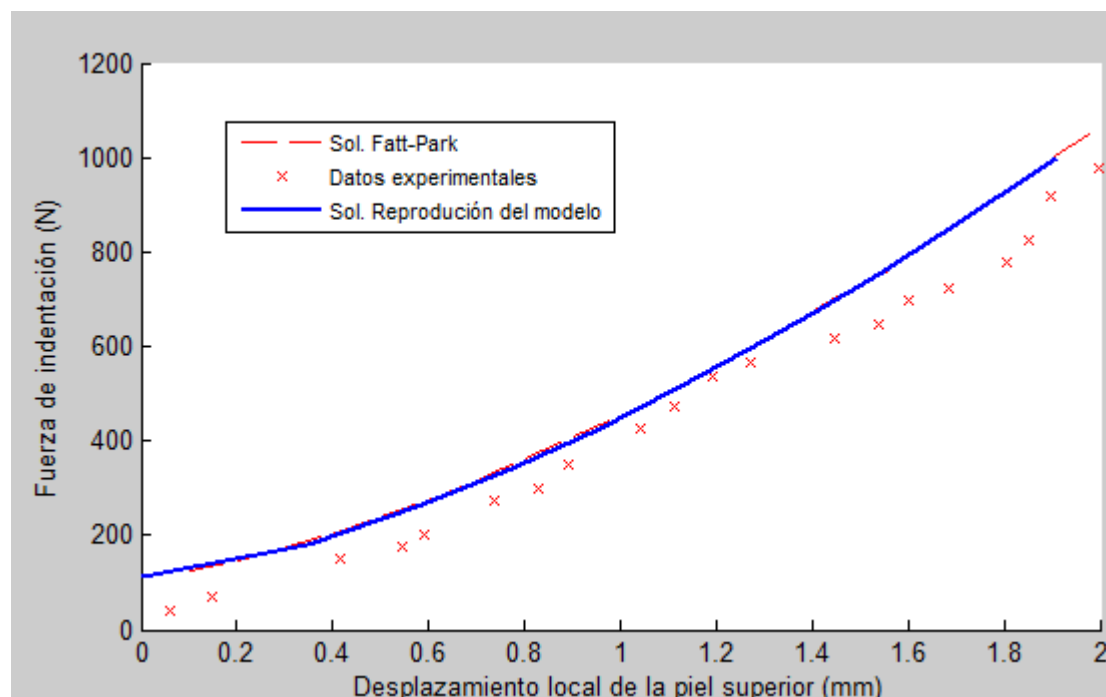


Figura 4.4 Fuerza de indentación - desplazamiento local de la piel superior.
Laminado [0/90]; Espesor del núcleo: 25.4 mm; Diámetro del proyectil: 25.4 mm.

En la siguiente tabla se muestra la diferencia en porcentaje entre los resultados experimentales y los modelos analíticos. Los valores de la fuerza de indentación son valores escogidos de los datos experimentales.

Fuerza de indentación (N)	Sol. Fatt-Park	Sol. Reproducción del modelo
199,9	34,22%	27,29%
349,2	13,17%	11,23%
474,4	6,29%	5,76%
566,7	4,40%	4,16%
647,3	11,95%	11,62%
776,8	12,53%	13,36%
975,4	6,35%	6,15%

Tabla 4.4 Diferencia entre datos experimentales y soluciones analíticas de la Figura 4.4.

La diferencia entre los datos experimentales y la reproducción del modelo analítico es menor que la dada por M. S. Hoo Fatt y K. S. Park por lo que este resultado se puede dar como válido.

4.4.1.2. DEFORMACIÓN TOTAL

La deformación total del panel sándwich se muestra en la siguiente figura:

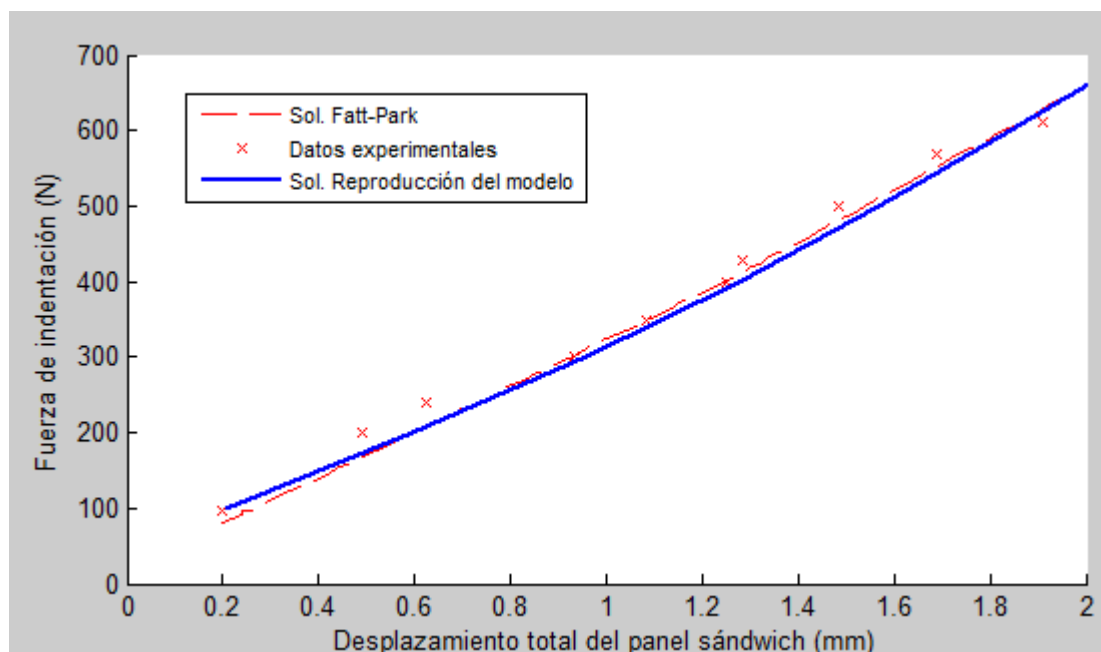


Figura 4.5 Fuerza de indentación - desplazamiento total del panel sándwich.
Laminado [0/90]; Espesor del núcleo: 25.4 mm; Diámetro del proyectil: 25.4 mm.

En la siguiente tabla se muestra la diferencia en porcentaje entre los datos experimentales y los dos modelos analíticos.

Fuerza de indentación (N)	Sol. Fatt-Park	Sol. Reproducción del modelo
97,5	22,21%	4,74%
199,5	21,34%	20,22%
300,9	0,25%	1,79%
400,1	0,24%	0,80%
499,5	3,64%	4,25%
610,8	2,30%	2,10%

Tabla 4.5 Diferencia entre datos experimentales y soluciones analíticas de la Figura 4.5.

Al igual que para la deformación local, esta solución se puede dar por válida, ya que las diferencias entre ambos modelos analíticos son mínimas e incluso en la solución de la reproducción del modelo, los valores en la zona inicial de la curva son mejores.

4.4.2. RESPUESTA DINÁMICA

En la siguiente gráfica se muestra la curva fuerza de contacto-tiempo de un panel sándwich empotrado en dos de sus caras, con un laminado [0/90] y un espesor del núcleo de 25.4 mm. El proyectil tiene un diámetro de 38.1 mm y su velocidad inicial es 1.2 m/s.

La fuerza de contacto se obtiene a partir de la ecuación (3.80).

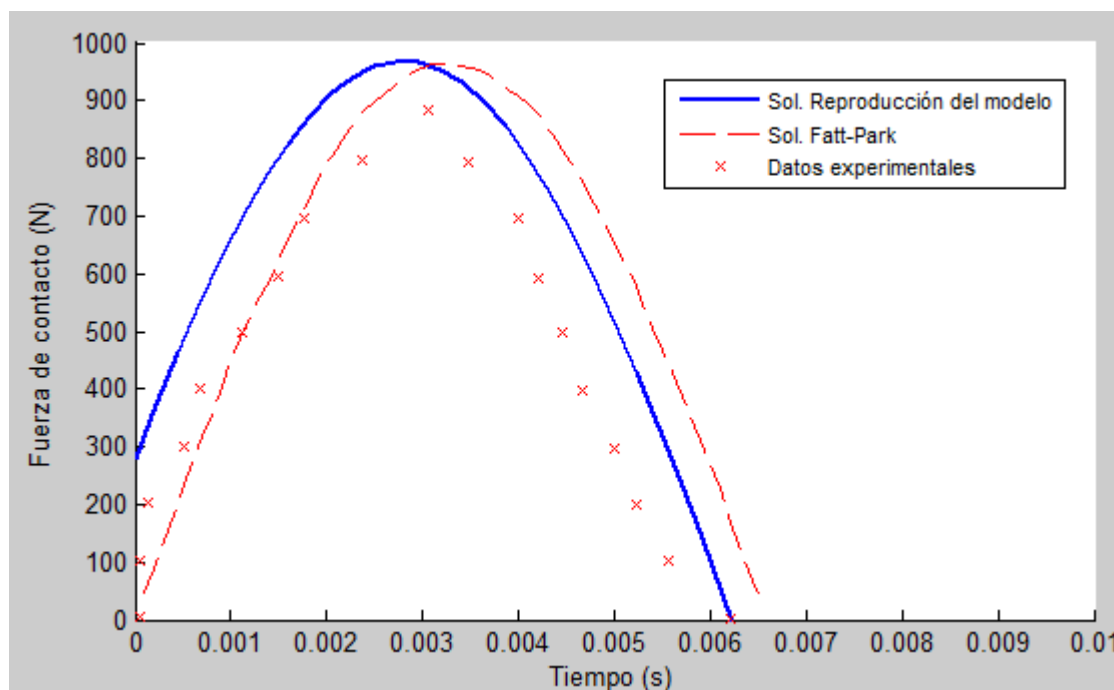


Figura 4.6 Fuerza de contacto - tiempo

Laminado [0/90]; Espesor del núcleo: 25.4 mm; Diámetro del proyectil: 38.1 mm; Velocidad: 1.2 m/s

A primera vista parece que la reproducción del modelo analítico no ha sido buena. Sobre todo, llama la atención la gran diferencia que existe en el instante de tiempo $t=0$.

Experimentalmente, como se observa en la Figura 4.6, la fuerza de contacto en el momento del impacto es cero. Aplicando las ecuaciones de este modelo no ocurre lo mismo por lo que existe una incongruencia en la solución analítica dada por M.S. Hoo Fatt y K S. Park. Esto se puede comprobar, calculando la aceleración de la piel superior (ecuación 3.81) para el instante de tiempo $t=0$ y sustituyendo en la ecuación (3.80). La fuerza de contacto máxima en el instante inicial, según el modelo planteado, es Q_d .

Este modelo analítico obtiene la respuesta dinámica de un impacto de baja velocidad mediante masas, resortes y un amortiguador. Este amortiguador representa la resistencia al aplastamiento del núcleo. La fuerza de resistencia que ejerce el amortiguador es constante por lo que actúa desde el instante inicial de impacto, es decir, en todos los instantes de tiempo, siempre se obtendrá una fuerza de contacto mayor o igual a la fuerza de este amortiguador.

En relación a la Figura 4.6, se observa que la fuerza de contacto máxima es muy parecida en ambas soluciones analíticas. Se intuye, por lo tanto, que M.S. Hoo Fatt y K S. Park ajustaron la curva gráficamente para obtener una fuerza de contacto inicial nula.

En la siguiente tabla se muestra la diferencia en porcentaje entre los datos experimentales y los modelos analíticos de la Figura 4.6:

Tiempo (ms)	Sol. Fatt-Park	Sol. Reproducción del modelo
0,135	68,77%	65,48%
0,690	22,69%	37,47%
1,769	2,72%	23,71%
2,371	10,14%	19,07%
3,060	9,01%	8,82%
4,202	62,05%	42,53%
4,994	122,23%	74,64%
5,554	352,06%	190,47%

Tabla 4.6 Diferencia entre datos experimentales y soluciones analíticas de la Figura 4.6.

Las diferencias entre los datos experimentales y los resultados analíticos son bastante altas. Comparando ambos modelos analíticos, se puede decir que la solución Fatt-Park se ajusta mejor en la primera parte de la curva mientras que la solución de la reproducción del modelo se ajusta mejor en la parte final de la curva.

A continuación se mostrará la fuerza de contacto máxima de un panel sándwich empotrado en dos de sus caras, con un laminado [0/90] y un espesor del núcleo de 25.4 mm en el que impacta un proyectil de 38.1 mm de diámetro a velocidades iniciales de: 1.20 m/s, 1.62 m/s, 2.2 m/s, 2.5 m/s y 3 m/s.

La fuerza de contacto máxima se obtiene a partir de la ecuación (3.83).

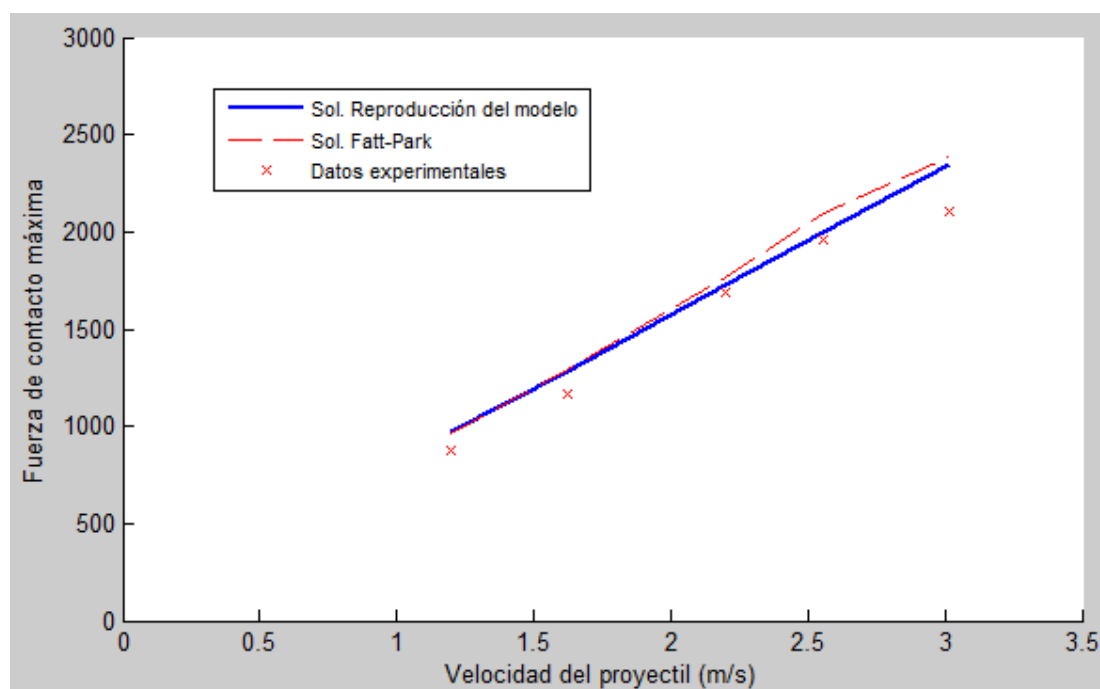


Figura 4.7 Fuerza de contacto máxima - velocidad del proyectil.
Laminado [0/90]; Espesor del núcleo: 25.4 mm; Diámetro del proyectil: 38.1 mm;

En la siguiente tabla se muestra la diferencia en porcentaje entre los datos experimentales y los modelos analíticos:

Velocidad del proyectil (m/s)	Sol. Fatt-Park	Sol. Reproducción del modelo
1,20	9,10%	10,13%
1,66	10,26%	10,00%
2,20	4,74%	2,31%
2,55	6,77%	1,58%
3,00	13,29%	11,44%

Tabla 4.7 Diferencia entre datos experimentales y soluciones analíticas de la Figura 4.7.

Observando la Figura 4.7 y la Tabla 4.7, se comprueba que la reproducción del modelo se ajusta mejor a los datos experimentales, especialmente, para valores de velocidades del proyectil mayores. El único valor para el que se encuentra mayor diferencia es para la velocidad de 1.2 m/s.

Las diferencias obtenidas entre las dos soluciones analíticas, tanto en esta, como en las anteriores gráficas, pueden ser debidas a varios motivos: diferente método de linealización de la rigidez dinámica local de la piel superior, la implementación del modelo en el programa de cálculo o la digitalización de los datos experimentales y analíticos.

Capítulo 5

MODIFICACIONES DEL MODELO ANALÍTICO

5.1. INTRODUCCIÓN

Una vez reproducido el modelo analítico, el objetivo es poder obtener unos resultados que se acerquen más a los datos experimentales. En concreto, nos centraremos en la parte dinámica del modelo, en la que se realizaron varias simplificaciones para facilitar la resolución de las ecuaciones diferenciales del modelo analítico (ecuaciones 3.67 y 3.68).

En el modelo analítico (Figura 3.8) se realizaban las siguientes simplificaciones:

- 1- La masa de la piel superior (m_f) es despreciable frente a la masa del proyectil.
- 2- La masa del sándwich (m_s) es despreciable frente a la masa del proyectil.
- 3- La rigidez dinámica local de la piel superior (K_{ld}) es lineal.

A continuación se resolverá el problema dinámico sin estas simplificaciones y se compararan los resultados con los obtenidos anteriormente, los resultados analíticos de M.S. Hoo Fatt y K S. Park y los datos experimentales de J. E. Williamson. Las soluciones que se darán son:

- Resolución del problema dinámico teniendo en cuenta las masas (m_f) y (m_s).
- Resolución del problema dinámico sin linealizar K_{ld} . Despreciando m_f y m_s .
- Resolución de las ecuaciones del modelo sin simplificar.

5.2. RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA TENIENDO EN CUENTA LAS MASAS (M_f) Y (M_s)

Se parte de las ecuaciones del modelo analítico sin realizar ninguna simplificación, (3.67) y (3.68). Estas ecuaciones se recuerdan a continuación:

$$(M_0 + m_f)(\ddot{\Delta} + \ddot{\delta}) + P_1(\delta) + Q_d = 0$$

$$Q_d + P_1(\delta) = m_s \ddot{\Delta} + k_{gd} \Delta$$

Se asume que la rigidez dinámica local de la piel superior se puede linealizar, con lo que tenemos:

$$(M_0 + m_f)(\ddot{\Delta} + \ddot{\delta}) + k_{ld} \delta + Q_d = 0 \quad (5.1)$$

$$Q_d + k_{ld} \delta = m_s \ddot{\Delta} + k_{gd} \Delta \quad (5.2)$$

Las masas efectivas de la piel y del sándwich se han calculado en el apartado 3.4.1. y las velocidades iniciales de la piel y del sándwich se han calculado en el apartado 3.4.2.

Las ecuaciones (5.1) y (5.2) están sujetas a las siguientes condiciones iniciales:

$$\delta(0) = 0 \quad y \quad \dot{\delta}(0) = \frac{M_0 v_0 k_{gd}}{[(M_0 + m_f)(k_{gd} + k_{ld}) + m_s k_{ld}]}$$

$$\Delta(0) = 0 \quad y \quad \dot{\Delta}(0) = \frac{M_0 v_0 k_{ld}}{[(M_0 + m_f)(k_{gd} + k_{ld}) + m_s k_{ld}]}$$

Resolviendo las ecuaciones diferenciales (5.1) y (5.2) se puede encontrar una solución numérica para $\ddot{\delta}$ y $\ddot{\Delta}$.

La fuerza de contacto entre el proyectil y la piel superior será:

$$F(t) = -M_0(\ddot{\Delta} + \ddot{\delta}) \quad (5.3)$$

A continuación se comparará este modelo (ecuación 5.3) con los resultados obtenidos anteriormente, el modelo analítico de Fatt y Park y los datos experimentales.

En la siguiente figura se muestra la curva fuerza de contacto-tiempo de un panel sándwich con un laminado [0/90] y un núcleo de espesor 25,4 mm. Este panel es impactado con un proyectil de 38.1 mm de diámetro. La velocidad inicial del proyectil es 1.2 m/s.

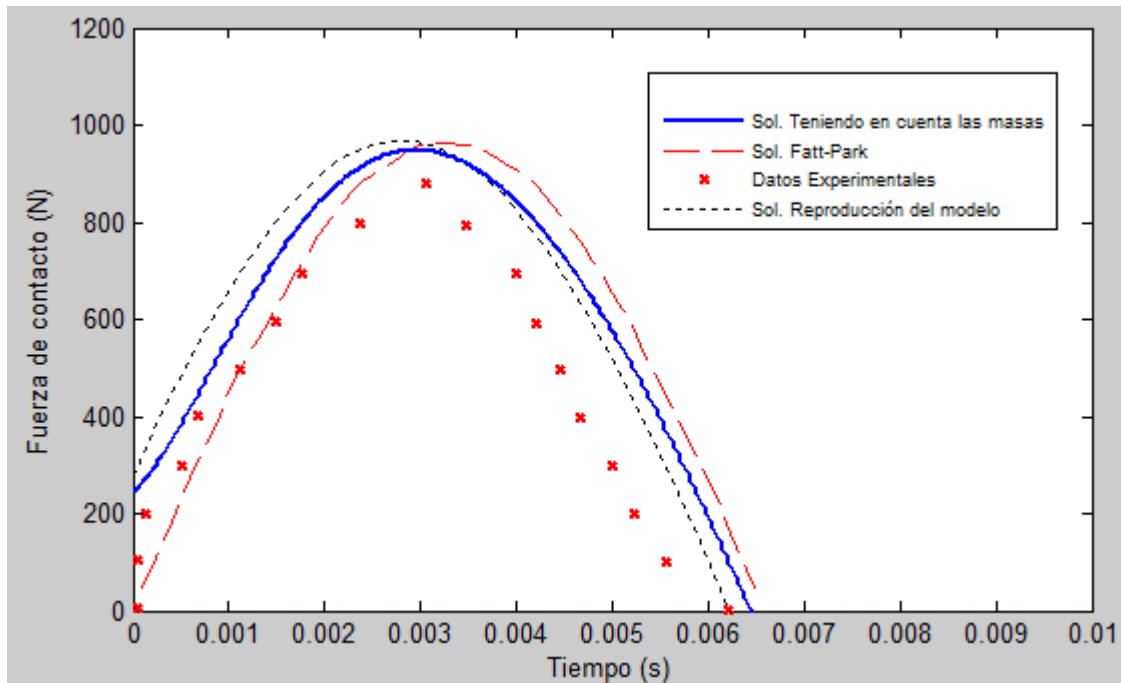


Figura 5.1 Fuerza de contacto - tiempo. Modelo teniendo en cuenta las masas.
Laminado [0/90]; Espesor del núcleo: 25.4 mm; Diámetro del proyectil: 38.1 mm; Velocidad: 1.2 m/s

Las diferencia entre los datos experimentales y las diferentes soluciones analíticas se muestran en la siguiente tabla:

Tiempo (ms)	Sol. Fatt-Park	Sol. Reproducción del modelo	Sol. Teniendo en cuenta las masas
0,135	68,77%	65,48%	35,56%
0,690	22,69%	37,47%	12,27%
1,769	2,72%	23,71%	14,87%
2,370	10,14%	19,07%	14,61%
3,062	9,01%	8,82%	7,32%
4,202	62,05%	42,53%	48,39%
4,994	122,23%	74,64%	95,52%
5,554	352,06%	190,47%	282,61%

Tabla 5.1 Diferencia entre datos experimentales y modelos analíticos de la Figura 5.1.

Observando la Figura 5.1 de un modo general, la solución teniendo en cuenta las masas de la piel y del sándwich se acerca más a los datos experimentales. En comparación con la solución de la reproducción del modelo, la solución mejora en la primera parte de la curva y se aleja en la parte final. Al compararlo con la solución Fatt-Park, se ajusta mejor en todos los puntos de la Tabla 5.1 excepto en dos, por lo que se puede decir que se ha mejorado el modelo de una forma considerable.

En cuanto a la fuerza de contacto máxima, se puede observar en la Figura 5.1 que la solución teniendo en cuenta las masas se acerca más a los datos experimentales que las otras dos soluciones analíticas.

5.3. RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA SIN LINEALIZAR K_{LD}

Al igual que en apartado anterior, se parte de las ecuaciones del modelo analítico sin realizar ninguna simplificación, (3.67) y (3.68). Se recuerdan estas ecuaciones:

$$(M_0 + m_f)(\ddot{\Delta} + \ddot{\delta}) + P_1(\delta) + Q_d = 0$$

$$Q_d + P_1(\delta) = m_s \ddot{\Delta} + k_{gd} \Delta$$

Despreciando las masas de la piel superior y del panel sándwich se tiene:

$$(M_0)(\ddot{\Delta} + \ddot{\delta}) + P_1(\delta) + Q_d = 0 \quad (5.4)$$

$$Q_d + P_1(\delta) = k_{gd} \Delta \quad (5.5)$$

Estas ecuaciones se pueden presentar en función de las deformaciones absolutas de la piel superior y del panel sándwich:

$$M_0 \ddot{X}_1 + k_{1d} (X_1 - X_2)^{(3/2)} + Q_d = 0 \quad (5.6)$$

$$Q_d + k_{1d} (X_1 - X_2)^{(3/2)} = k_{gd} X_2 \quad (5.7)$$

siendo: X_1 la deformación absoluta de la piel superior.
 X_2 la deformación absoluta del panel sándwich.
 $\delta = X_1 - X_2$.
 $\Delta = X_2$.

Despejando \ddot{X}_1 de la ecuación (5.6) y X_2 de la ecuación (5.7) se obtiene:

$$\ddot{X}_1 = \frac{(k_{1d} (X_1 - X_2)^{(3/2)} + Q_d)}{M_0} \quad (5.8)$$

$$X_2 = f(X_1) \quad (5.9)$$

Combinando las ecuaciones (5.8) y (5.9) se obtiene la siguiente ecuación diferencial, que puede ser resuelta numéricamente:

$$\ddot{X}_1 = \frac{(k_{1d} (X_1 - f(X_1))^{(3/2)} + Q_d)}{M_0} \quad (5.10)$$

Las condiciones iniciales para la ecuación (5.10) son:

$$X_1(0) = 0 \quad y \quad \dot{X}_1(0) = v_0$$

La velocidad absoluta inicial de la piel superior se ha calculado en el apartado 3.4.2. La fuerza de contacto es:

$$F(t) = -M_0 \ddot{X}_1 \quad (5.11)$$

La figura siguiente muestra la curva fuerza de contacto-tiempo de un panel sándwich con un laminado [0/90] y un núcleo de espesor 25,4 mm. El proyectil es de 38.1 mm de diámetro y la velocidad inicial del proyectil es 1.2 m/s.

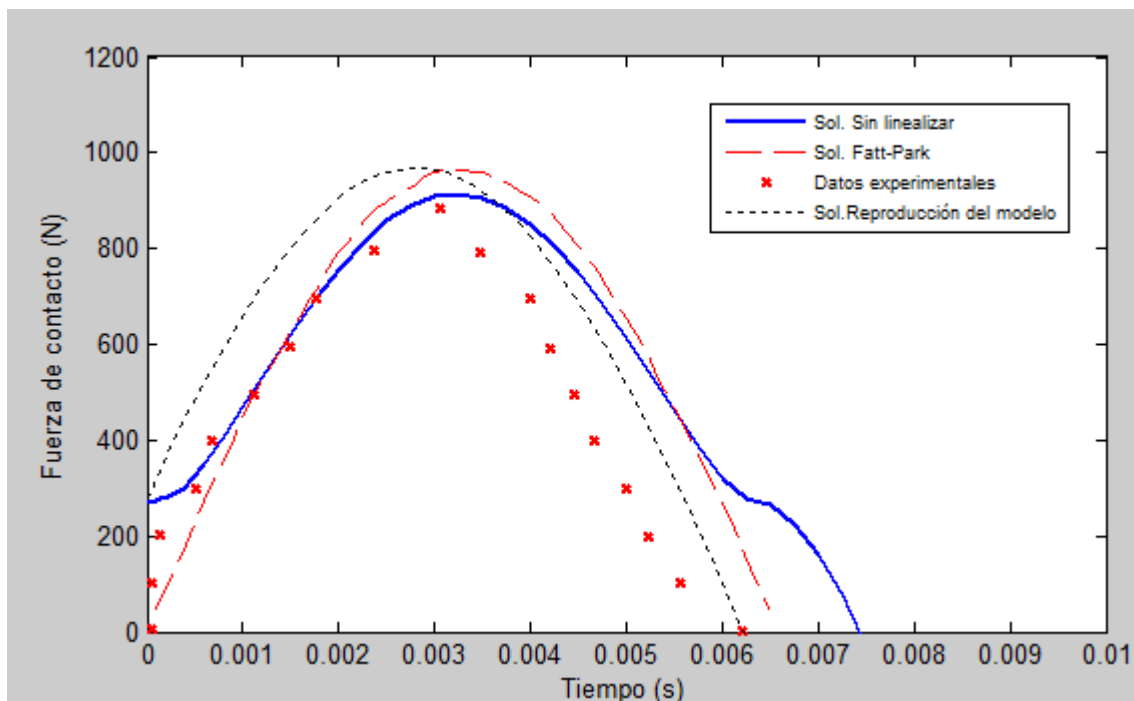


Figura 5.2 Fuerza de contacto - tiempo. Modelo: Sin linealizar.
Laminado [0/90]; Espesor del núcleo: 25.4 mm; Diámetro del proyectil: 38.1 mm; Velocidad: 1.2 m/s

Las diferencias en porcentajes entre las diferentes soluciones analíticas y los datos experimentales de la Figura 5.2 se muestran en la siguiente tabla:

Tiempo (ms)	Sol. Fatt-Park	Sol. Reproducción del modelo	Sol. Sin linealizar
0,135	68,77%	65,48%	37,10%
0,686	22,69%	37,47%	5,51%
1,769	2,72%	23,71%	0,49%
2,371	10,14%	19,07%	4,67%
3,062	9,01%	8,82%	3,18% ⁰
4,202	62,05%	42,53%	51,37%
4,994	122,23%	74,64%	107,61%
5,554	352,06%	190,47%	344,99%

Tabla 5.2 Diferencia entre datos experimentales y modelos analíticos de la Figura 5.2.

Igual que en la solución teniendo en cuenta las masas, la solución sin linealizar se acerca más a los datos experimentales en la primera parte de la curva y se aleja en la parte final respecto a la solución de la reproducción del modelo. Respecto de la solución Fatt-Park, se ajusta mejor en toda la curva menos en el extremo final, que se separa bruscamente de su trayectoria normal. Este salto brusco puede ser debido al método utilizado en la resolución del problema por lo que sería interesante utilizar otro método de resolución para comprobar si sucede lo mismo.

Como se observa en la Figura 5.2, la fuerza de contacto máxima de la solución sin linealizar se ajusta más a los datos experimentales que las demás soluciones analíticas.

5.4. RESOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES DEL MODELO SIN SIMPLIFICAR

Del mismo modo que en los apartados anteriores, se parte de las ecuaciones iniciales del modelo dinámico, (3.67) y (3.68), que son:

$$(M_0 + m_f)(\ddot{\Delta} + \ddot{\delta}) + k_{1d}\delta^{(3/2)} + Q_d = 0$$

$$Q_d + k_{1d}\delta^{(3/2)} = m_s\ddot{\Delta} + k_{gd}\Delta$$

Estas ecuaciones se pueden representar de forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} 0 & M_0 + m_f & 0 & M_0 + m_f \\ 0 & -m_s & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \\ \dot{y}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & k_{1d} & 0 \\ -k_{gd} & 0 & k_{1d} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3^{(3/2)} \\ y_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_d \\ Q_d \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \quad (5.12)$$

siendo:

$$\begin{aligned} \Delta &= y_1 \\ \dot{\Delta} &= y_2 \\ \delta &= y_3 \\ \dot{\delta} &= y_4 \end{aligned}$$

La ecuación (5.12) se puede escribir como:

$$[A] \cdot \begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \\ \dot{y}_4 \end{bmatrix} + F \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3^{(3/2)} \\ y_4 \end{bmatrix} = 0 \quad (5.13)$$

Despejando $\{ \dot{y} \}$ de la ecuación (5.13) se obtiene:

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \\ \dot{y}_4 \end{pmatrix} = -[A]^{-1} \cdot F \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3^{(3/2)} \\ y_4 \end{pmatrix} \quad (5.14)$$

Este sistema de ecuaciones puede ser resuelto mediante un método numérico. Para encontrar una solución se ha de imponer las siguientes condiciones iniciales, calculadas en el apartado 3.4.2.:

$$y_1 = 0$$

$$y_2 = \frac{M_0 v_0 k_{ld}}{[(M_0 + m_f)(k_{gd} + k_{ld}) + m_s k_{ld}]}$$

$$y_3 = 0$$

$$y_4 = \frac{M_0 v_0 k_{gd}}{[(M_0 + m_f)(k_{gd} + k_{ld}) + m_s k_{ld}]}$$

La fuerza de contacto para este modelo es:

$$F(t) = -M_0 (\dot{y}_2 + \dot{y}_4) \quad (5.15)$$

Como en los apartados anteriores, se compara este modelo (ecuación 5.15) con el modelo analítico de Fatt y Park, los datos experimentales de Williamson y la solución de la reproducción del modelo del capítulo 4.

En la siguiente gráfica se muestra la curva fuerza de contacto-tiempo de un panel sándwich con un laminado [0/90] y un núcleo de 25,4 mm de espesor, que es impactado con un proyectil de 38.1 mm de diámetro. La velocidad inicial del proyectil es 1.2 m/s.

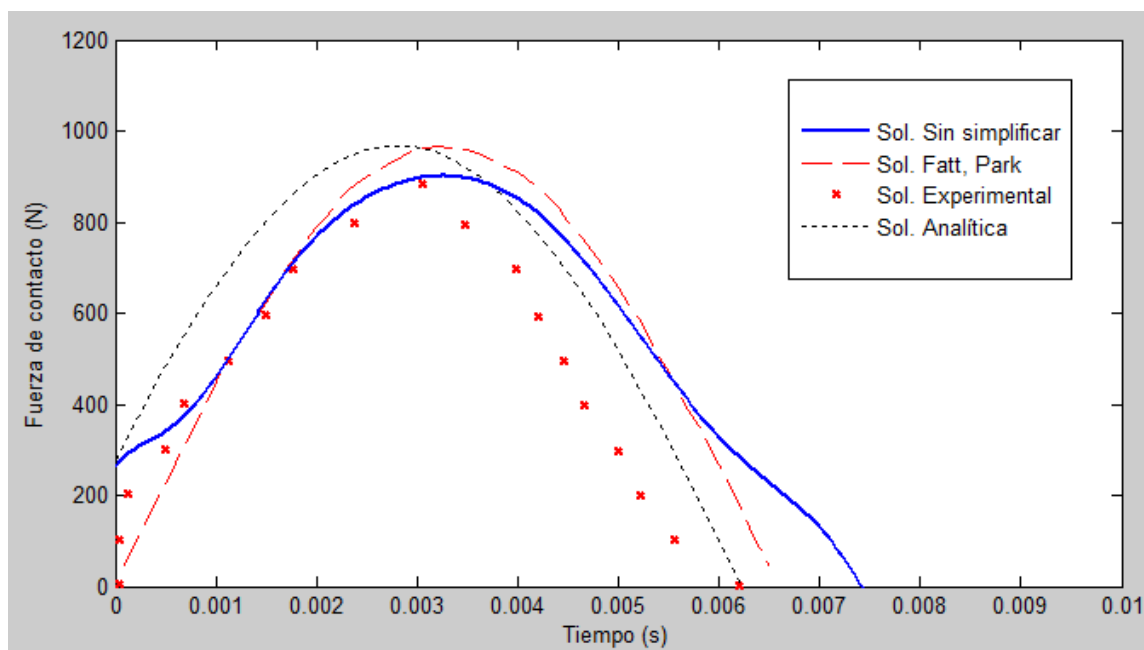


Figura 5.3 Fuerza de contacto - tiempo. Modelo: Sin simplificaciones.
Laminado [0/90]; Espesor del núcleo: 25.4 mm; Diámetro del proyectil: 38.1 mm; Velocidad: 1.2 m/s

Las diferencias en porcentaje entre las soluciones analíticas y los datos experimentales son:

Tiempo (ms)	Sol. Fatt-Park	Sol. Reproducción del modelo	Sol. Sin simplif.
0,135	68,77%	65,48%	6,31%
0,690	22,69%	37,47%	6,41%
1,769	2,72%	23,71%	1,01%
2,370	10,14%	19,07%	4,56%
3,062	9,01%	8,82%	1,78%
4,202	62,05%	42,53%	51,74%
4,994	122,23%	74,64%	108,39%

Tabla 5.3 Diferencia entre datos experimentales y modelos analíticos de la Figura 5.6.

Como en los dos modelos anteriores (solución teniendo en cuenta las masas y solución sin linealizar), la solución del modelo sin simplificaciones se ajusta mejor en la primera parte de la curva y se aleja en la segunda parte de la gráfica, respecto de la solución de la reproducción del modelo.

Respecto de la solución Fatt-Park, la solución sin simplificaciones se ajusta mejor en todos los puntos de la Tabla 5.3. Al igual que la solución sin linealizar, la curva en el extremo de la gráfica se separa de su trayectoria normal pero en este caso no tan bruscamente que en el anterior modelo. Como era de esperar, de los tres modelos analíticos desarrollados en el Capítulo 5, el que más se aproxima a los resultados experimentales es el último (Modelo sin simplificaciones). Este modelo se utilizará en el siguiente capítulo para realizar un estudio paramétrico y caracterizar el impacto de baja velocidad respecto de algunos parámetros del impacto.

Capítulo 6

ESTUDIO PARAMÉTRICO

6.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo se realizará un estudio paramétrico utilizando el modelo analítico desarrollado en el apartado 5.4. Se mostrará, a partir de la ecuación (5.15), la curva fuerza de contacto-tiempo de diferentes paneles sándwich para comprobar su comportamiento.

Para realizar este estudio se variará cada dato de los mostrados en la Tabla 4.1 mientras los demás permanecen constantes. Por ejemplo, se variará el espesor del núcleo y se mantendrán constantes el diámetro del proyectil, la velocidad inicial del proyectil y el tipo de laminado, comprobando así, como varía la fuerza de contacto respecto del espesor del núcleo. Esto se realizará con cada una de los datos de la Tabla 4.1. Las soluciones analíticas obtenidas se compararán gráficamente con los datos experimentales dados por Williamson y se mostrará la diferencia porcentual entre unos y otros.

También se mostrará para cada parámetro analizado como varía la fuerza de contacto máxima.

6.2. VARIACIÓN DEL ESPESOR DEL NÚCLEO

En este apartado se variará el espesor del núcleo manteniendo fijo el resto de datos del problema. Se realizará el análisis con dos conjuntos de datos diferentes para distintos espesores de núcleo. En la siguiente tabla se muestran los diferentes datos del problema:

Espesor del núcleo		
6,4 mm	9,5 mm	25,4 mm

Tabla 6.1 Diferentes espesores del núcleo.

Datos	Laminado	Diámetro del proyectil	Velocidad del proyectil
Panel 1	[0/90]	25,4 mm	1,20 m/s
Panel 2	[0/90]	25,4 mm	2,55 m/s

Tabla 6.2 Datos del problema del apartado 6.2.

Primero, se estudiará el Panel 1 para los diferentes espesores del núcleo de la Tabla 6.1 y se mostrará como varía la fuerza de contacto máxima respecto al espesor. Posteriormente, se realizará el mismo proceso para el Panel 2.

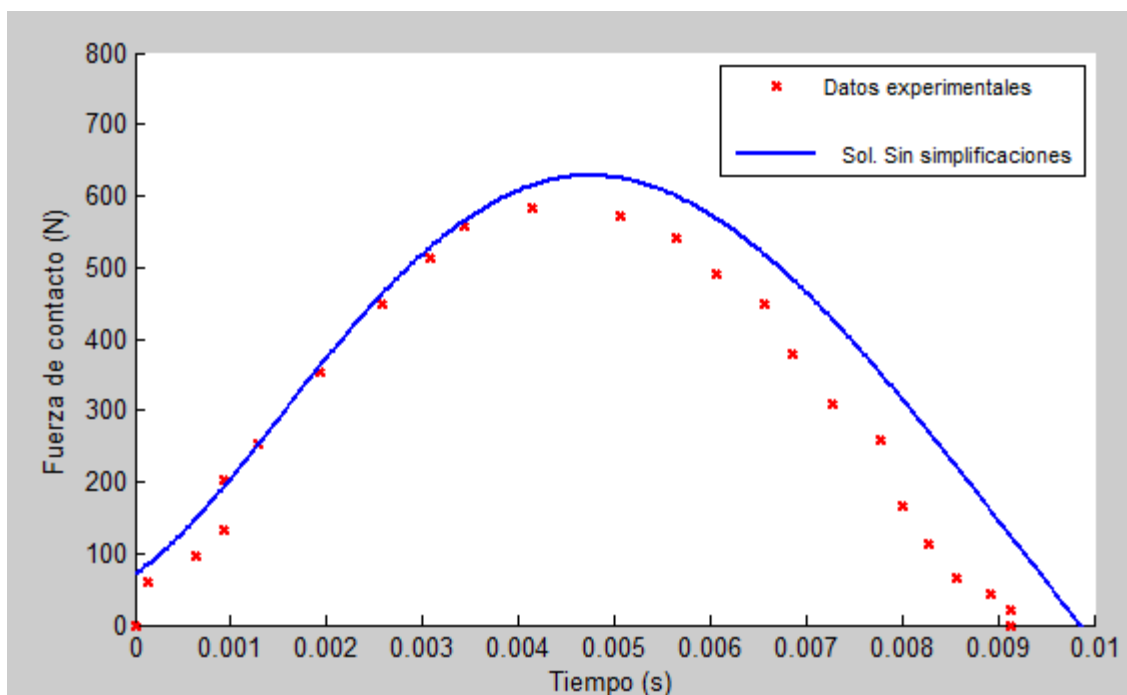


Figura 6.1 Fuerza de contacto - tiempo.

Laminado [0/90]; Diámetro del proyectil: 25,4 mm; Velocidad: 1,2 m/s; Espesor del núcleo: 6,4 mm

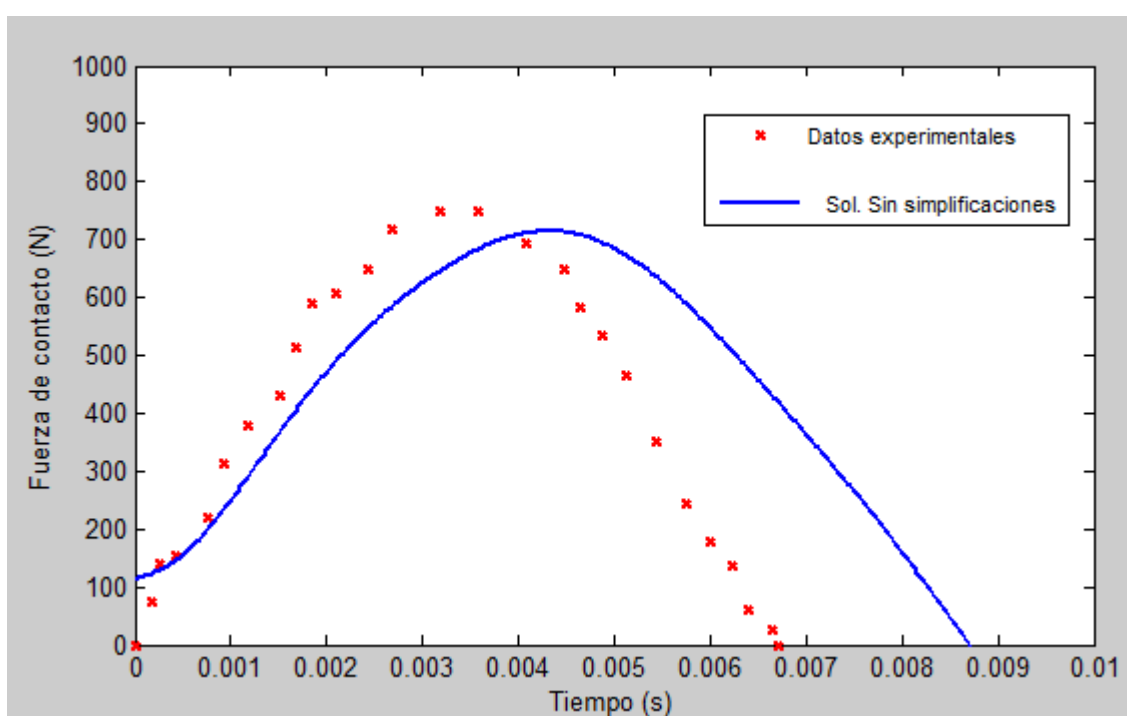


Figura 6.2 Fuerza de contacto - tiempo.

Laminado [0/90]; Diámetro del proyectil: 25,4 mm; Velocidad: 1,2 m/s; Espesor del núcleo: 9,5 mm

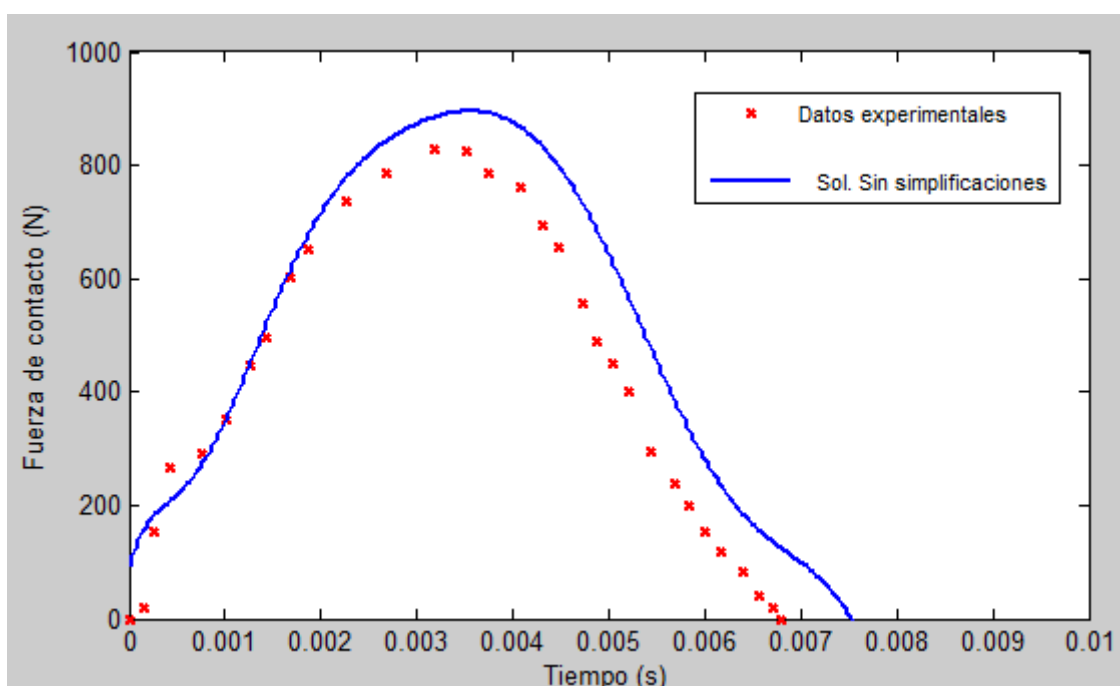


Figura 6.3 Fuerza de contacto - tiempo.

Laminado [0/90]; Diámetro del proyectil: 25,4 mm; Velocidad: 1,2 m/s; Espesor del núcleo: 25,4 mm

Las soluciones analíticas de las Figuras 6.1 y 6.3 se aproximan bastante bien a las curvas experimentales, sin embargo en la Figura 6.2 se observa una mayor diferencia entre la solución analítica y los datos experimentales. Al igual que los resultados obtenidos en el Capítulo 5, las soluciones analíticas se ajustan mejor en la primera parte de la curva y se alejan en la parte final.

Las diferencias entre las soluciones analíticas de las Figuras 6.1, 6.2 y 6.3 respecto de los datos experimentales se muestran en la siguiente tabla:

Figura 6.1		Figura 6.2		Figura 6.3	
Tiempo (s)	Sol. Sin simplif.	Tiempo (s)	Sol. Sin simplif.	Tiempo (s)	Sol. Sin simplif.
0,142	35,30%	0,257	8,50%	0,259	9,54%
0,928	4,71%	0,755	9,32%	0,762	2,92%
1,929	1,95%	1,511	11,99%	1,430	6,06%
2,571	2,71%	2,430	13,60%	2,270	5,62%
3,429	1,41%	3,586	9,12%	3,180	8,28%
5,071	8,99%	4,480	9,48%	4,080	8,65%
6,571	15,75%	4,880	30,20%	4,720	29,73%
7,786	35,32%	5,438	80,72%	5,430	60,71%
8,324	223,21%	6,241	237,03%	6,400	127,34%

Tabla 6.3 Diferencias entre datos experimentales y solución analítica 'Sol. Sin simplif.' de las Figuras 6.1, 6.2 y 6.3.

Las diferencias de los datos finales de la curva que se muestran en la Tabla 6.3 son muy elevadas debido a que la curva analítica se aleja de la curva experimental y a que los valores que se están comparando son muy pequeños y cualquier diferencia entre ellos generan diferencias porcentuales muy altas. Por ejemplo, en la Figura 6.2 se tiene una fuerza de contacto máxima experimental de 743,2 N y una fuerza de contacto máxima teórica de 714,6 N, lo que supone una diferencia de menos del 5%; sin embargo, en los instantes finales de tiempo, si se tiene una fuerza de contacto experimental de 20 N y la fuerza de contacto teórica obtenida es de 35 N, la diferencia porcentual es de 75 %.

Esto mismo ocurre con los datos iniciales de la curva. Se obtienen diferencias porcentuales elevadas aunque no tanto que para los datos finales ya que en este caso, aún comparando valores muy pequeños, en la mayoría de los casos la curva teórica obtenida es muy parecida a la experimental.

En la siguiente tabla se muestra la fuerza de contacto máxima y la diferencia entre los datos experimentales y las soluciones analíticas:

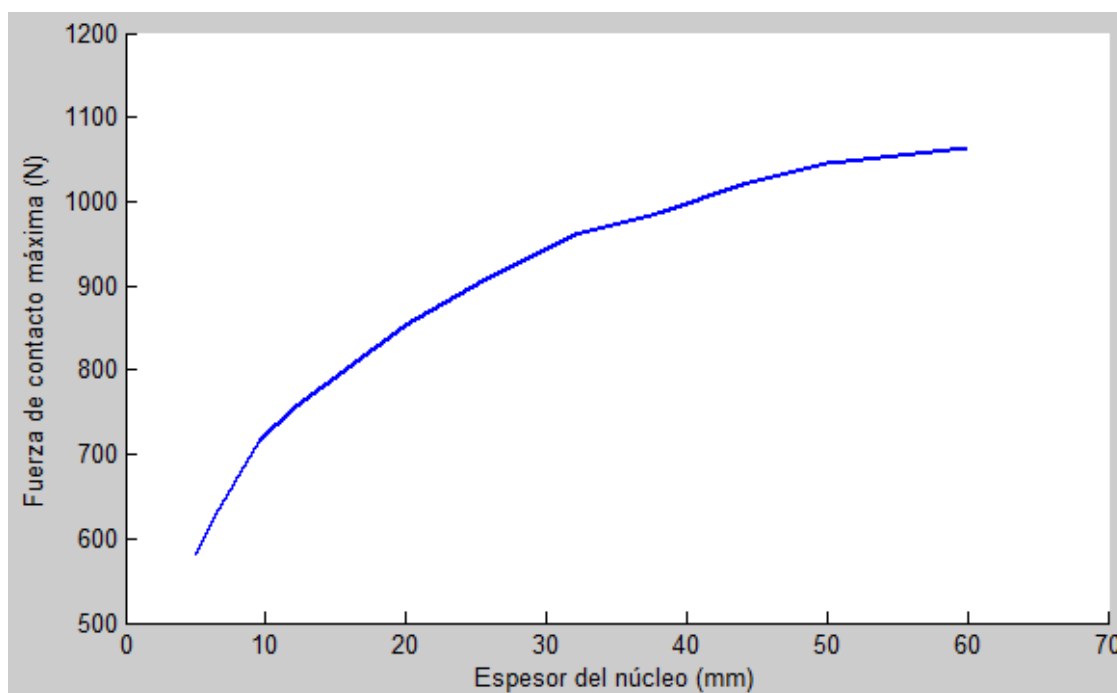
	Fuerza de contacto máxima		
	Figura 6.1	Figura 6.2	Figura 6.3
Datos experimentales	587,1 N	743,2 N	841,2 N
Sol. Sin simplificaciones	627,4 N	714,6 N	895,3 N
Diferencia %	6,81%	4,52%	6,43%

Tabla 6.4 Fuerza de contacto máxima. Diferencia entre datos experimentales y Sol. Sin simplificaciones. Figura 6.1; Figura 6.2; Figura 6.3.

Las diferencias entre los datos experimentales y los resultados analíticos se han mejorado respecto de la solución de Fatt-Park y de la solución de la reproducción del modelo.

Aunque para la Figura 6.2 se ha obtenido menos diferencia de la fuerza máxima que para las otras dos figuras, hay que decir que, en general, la curva analítica no describe del todo bien la curva experimental. También se puede ver que para espesores de núcleo de 6,4 mm y 25,4 mm, las fuerzas de contacto máximas teóricas son mayores a las experimentales mientras que para espesor del núcleo de 9,5 mm se obtiene una fuerza de contacto teórica menor a la experimental.

La siguiente figura muestra la fuerza de contacto máxima en función del espesor del núcleo para el panel 1 de la Tabla 6.2:



*Figura 6.4 Fuerza de contacto máxima - espesor del núcleo. Sol. Sin simplificaciones.
Laminado [0/90]; Diámetro del proyectil: 25,4 mm; Velocidad: 1,2 m/s*

En la Figura 6.4 se observa como varía la fuerza de contacto máxima respecto al espesor del núcleo. Se han obtenido resultados para valores del espesor del núcleo comprendidos entre 5 mm y 60 mm, ya que suelen ser valores típicos utilizados en la realidad para fabricar este tipo de paneles sándwich.

Como se puede ver, la curva que representa la fuerza de contacto máxima en función del espesor del núcleo tiene forma logarítmica. La fuerza de contacto máxima aumenta de forma significativa para espesores del núcleo bajos y para espesores del núcleo mayores, la fuerza de contacto máxima tiende a estabilizarse.

A continuación se analizará el panel 2 de la Tabla 6.2 para verificar los resultados obtenidos del Panel 1:

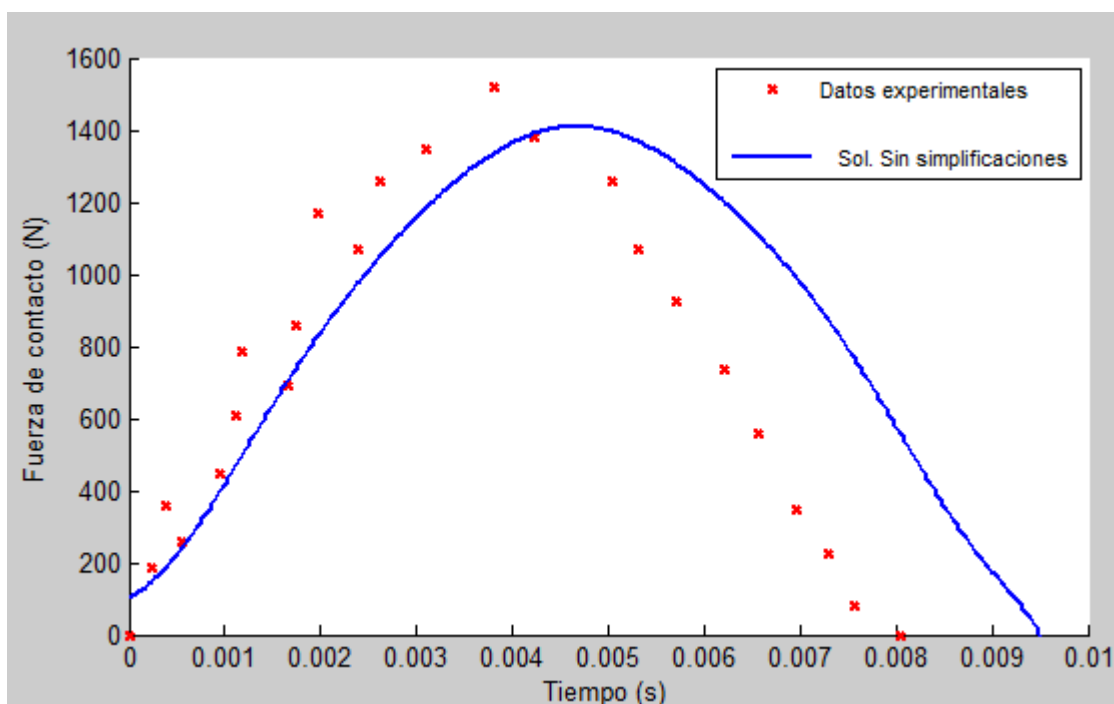


Figura 6.5 Fuerza de contacto - tiempo.

Laminado [0/90]; Diámetro del proyectil: 25,4 mm; Velocidad: 2,55 m/s; Espesor del núcleo: 6,4 mm

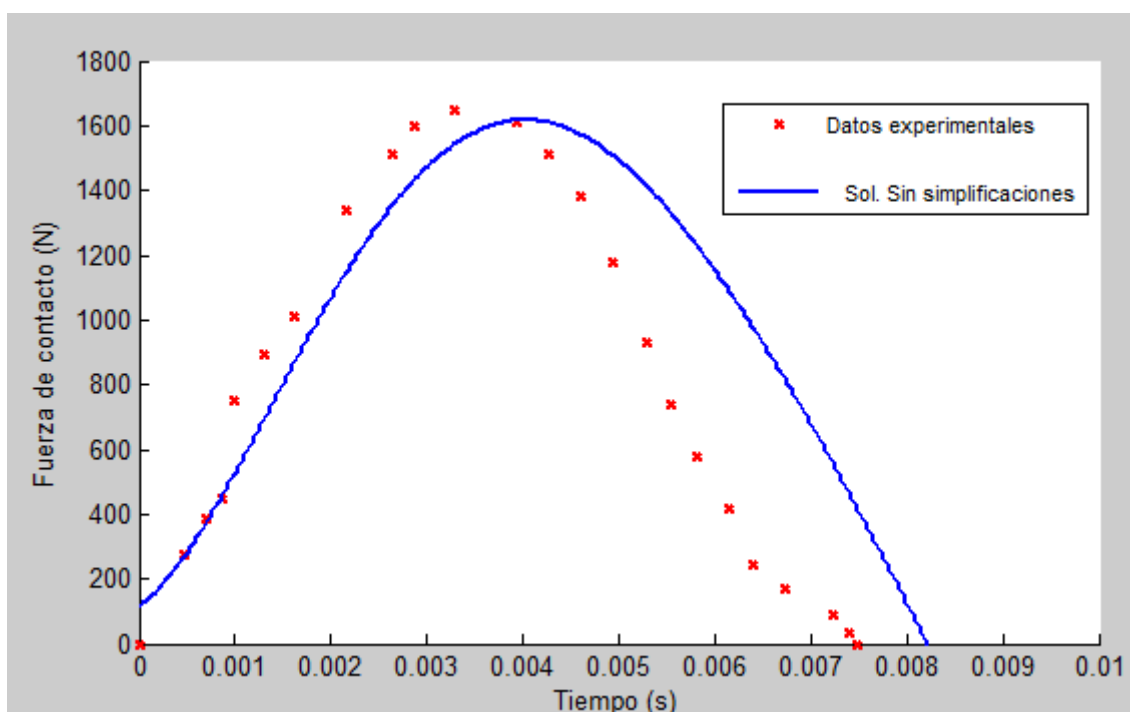


Figura 6.6 Fuerza de contacto - tiempo.

Laminado [0/90]; Diámetro del proyectil: 25,4 mm; Velocidad: 2,55 m/s; Espesor del núcleo: 9,5 mm

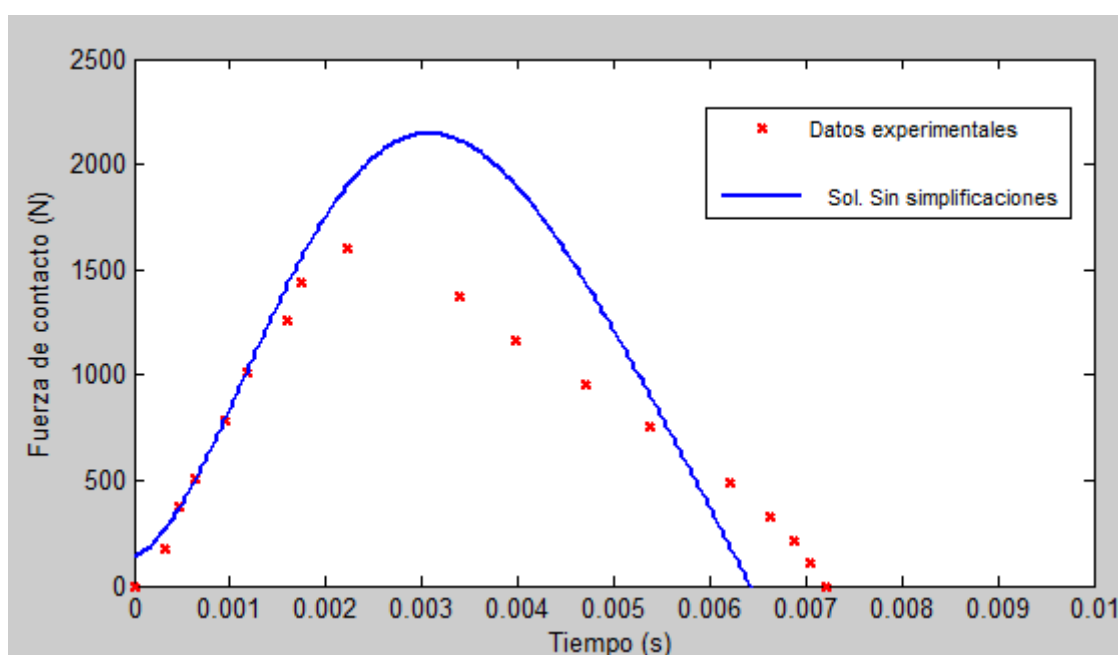


Figura 6.7 Fuerza de contacto - tiempo.

Laminado [0/90]; Diámetro del proyectil: 25,4 mm; Velocidad: 2,55 m/s; Espesor del núcleo: 25,4 mm

Como en los casos anteriores, las soluciones analíticas describen perfectamente la primera parte de la curva experimental mientras que se alejan en la parte final. Se puede observar en la Figura 6.7, que la solución analítica difiere bastante más de los datos experimentales que las demás figuras. Si se comparan las soluciones del Panel 1 y las soluciones del Panel 2, se ve que la fuerza de contacto máxima aumenta con el espesor del núcleo, sin embargo la fuerza de contacto máxima para el espesor del núcleo de 25,4 mm (Figura 6.7) es muy similar que para el espesor del núcleo de 9,5 mm (Figura 6.6). Esto se aclarará en las siguientes tablas, donde se muestran las diferencias entre datos experimentales y soluciones analíticas.

Las diferencias entre las soluciones analíticas y datos experimentales de las Figuras 6.5, 6.6 y 6.7 se muestran en la siguiente tabla:

Figura 6.5		Figura 6.6		Figura 6.7	
Tiempo (s)	Sol. Sin simplif.	Tiempo (s)	Sol. Sin simplif.	Tiempo (s)	Sol. Sin simplif.
0,234	9,51%	0,465	2,20%	0,476	7,80%
0,951	10,73%	0,996	17,12%	0,951	5,95%
1,670	2,60%	1,625	12,72%	1,588	4,27%
2,380	8,97%	2,641	9,57%	2,229	0,49%
3,100	11,40%	3,934	0,12%	3,968	45,42%
4,230	1,08%	4,603	13,41%	4,715	26,65%
5,720	41,34%	5,290	51,42%	6,200	46,01%
6,560	98,20%	6,145	145,20%	6,620	88,99%

Tabla 6.5 Diferencias entre datos experimentales y solución analítica 'Sol. Sin simplif.' de las Figuras 6.5, 6.5 y 6.7.

Como se ha explicado en la Tabla 6.4, las diferencias que se obtienen para los datos finales del impacto son muy elevadas debido a que los valores que se comparan son muy pequeños.

En la siguiente tabla se muestra la fuerza máxima de contacto y la diferencia entre los datos experimentales y las soluciones analíticas de las Figuras 6.5, 6.6 y 6.7:

	Fuerza de contacto máxima		
	Figura 6.5	Figura 6.6	Figura 6.7
Datos experimentales	1511 N	1645 N	1689 N
Sol. Sin simplificaciones	1414 N	1631 N	2127 N
Diferencia	6,41%	0,85%	25,93%

Tabla 6.6 Fuerza de contacto máxima. Diferencia entre datos experimentales y Sol. Sin simplificaciones. Figura 6.5; Figura 6.6; Figura 6.7.

Como se ha comentado anteriormente, llama la atención los datos experimentales de la Figura 6.7 ya que no siguen una lógica respecto a las demás figuras. La fuerza de contacto máxima es menor de lo esperado ya que observando las demás figuras, la fuerza de contacto máxima debería ser bastante más elevada. Un motivo de esto puede ser que los datos experimentales para el espesor de 25,4 mm se viese afectado por algún efecto externo que pudiese alterar el resultado. A continuación se muestra la fuerza de contacto máxima en función del espesor del núcleo:

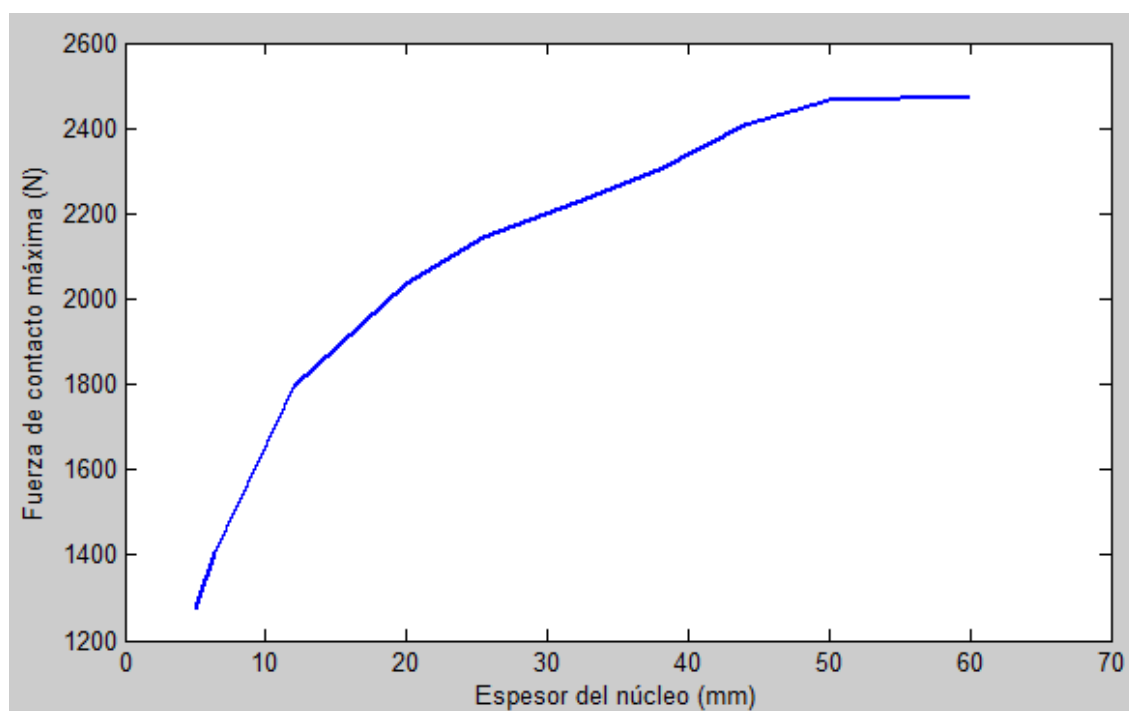


Figura 6.8 Fuerza de contacto máxima - espesor del núcleo. Sol. Sin simplificaciones. Laminado [0/90]; Diámetro del proyectil: 25,4 mm; Velocidad: 2,55 m/s

En la Figura 6.8 se verifica que la curva que representa la fuerza de contacto máxima en función del espesor del núcleo tiene forma logarítmica, para valores comprendidos entre 5 mm y 60 mm.

6.3. VARIACIÓN DE LA VELOCIDAD INICIAL DEL PROYECTIL

En este punto se variará la velocidad inicial del proyectil manteniendo fijo el resto de datos del problema. Se realizará el estudio con dos conjuntos de datos diferentes para distintas velocidades iniciales del proyectil. En la siguiente tabla se muestra los diferentes datos del problema:

Velocidad del proyectil		
1.20 m/s	2.55 m/s	3.45 m/s

Tabla 6.7 Diferentes velocidades iniciales del proyectil.

Datos	Laminado	Diámetro del proyectil	Espesor del núcleo
Panel 3	[0/90]	38.1 mm	25.4 mm
Panel 4	[0/90]	25.4 mm	6.4 mm

Tabla 6.8 Datos del problema del apartado 6.3.

Primero se analiza el Panel 3 y posteriormente se comprobarán los resultados analizando el Panel 4:

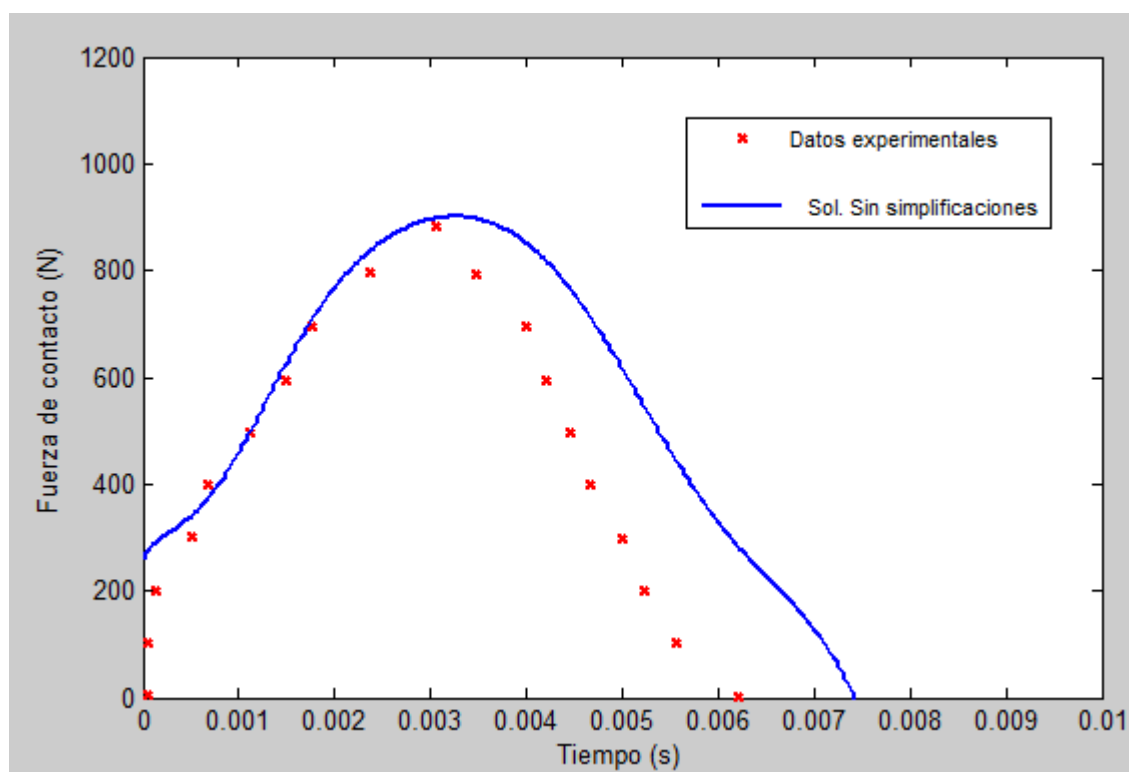


Figura 6.9 Fuerza de contacto - tiempo.

Laminado [0/90]; Diámetro del proyectil: 38,1 mm; Espesor del núcleo: 25,4 mm; Velocidad: 1,2 m/s

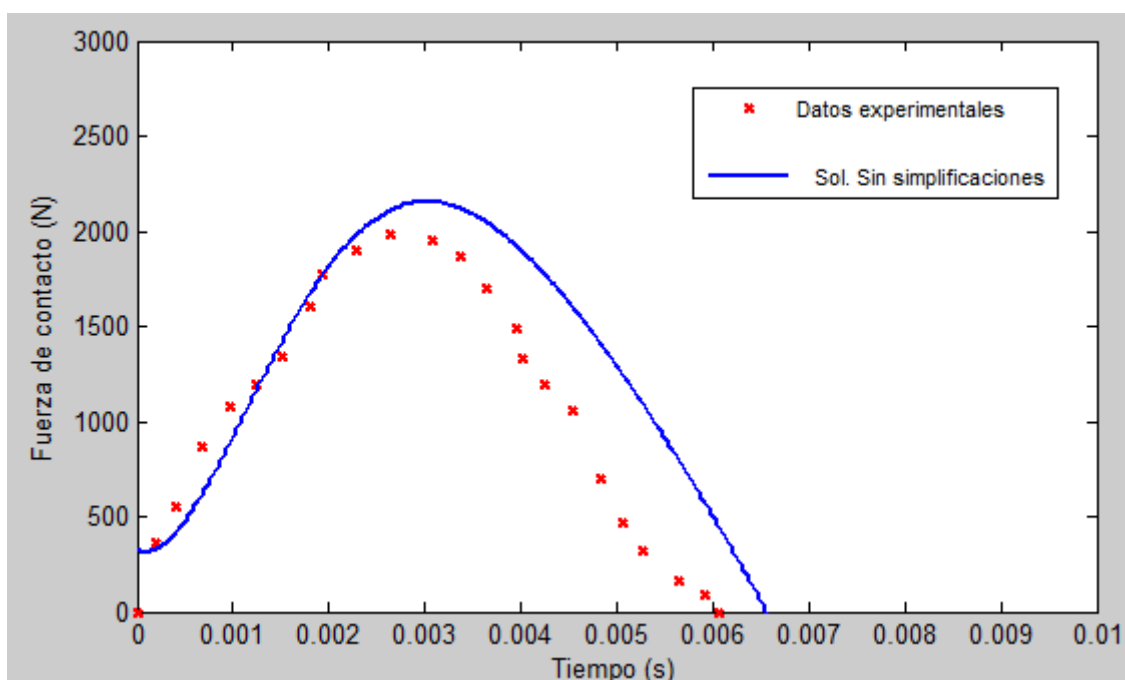


Figura 6.10 Fuerza de contacto - tiempo.
Laminado [0/90]; Diámetro del proyectil: 38,1 mm; Espesor del núcleo: 25,4 mm ; Velocidad: 2,55m/s

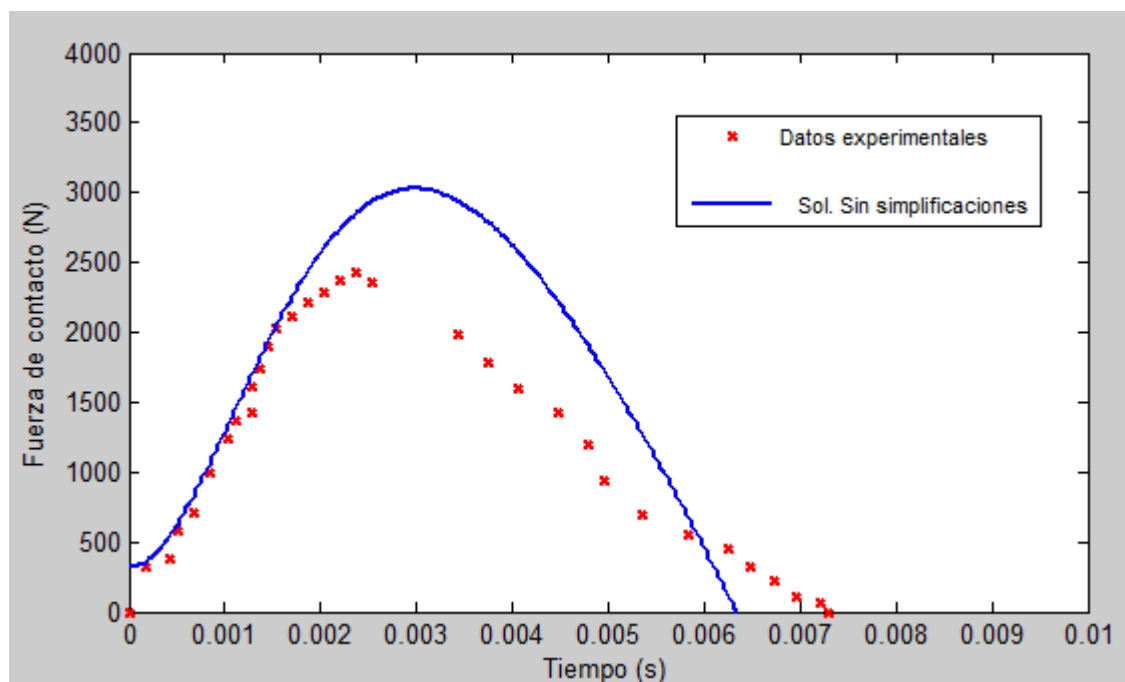


Figura 6.11 Fuerza de contacto - tiempo.
Laminado [0/90]; Diámetro del proyectil: 38,1 mm; Espesor del núcleo: 25,4 mm ; Velocidad: 3,45m/s

Las soluciones analíticas de las Figuras 6.9 y 6.10 se ajustan bien a la forma de la curva experimental, aunque como en todos los casos anteriores, en la parte final, las curvas analíticas tienden a alejarse de las curvas experimentales. La Figura 6.11 describe perfectamente la curva en su parte inicial pero la fuerza de contacto máxima y la parte final de la curva difiere mucho del resultado experimental.

Las diferencias entre las soluciones analíticas y los datos experimentales de las Figuras 6.9, 6.10 y 6.11 se muestran en la siguiente tabla:

Figura 6.9		Figura 6.10		Figura 6.11	
Tiempo (s)	Sol. Sin simplif.	Tiempo (s)	Sol. Sin simplif.	Tiempo (s)	Sol. Sin simplif.
0,135	14,68%	0,201	6,70%	0,174	11,74%
0,686	6,03%	0,961	5,78%	0,852	7,88%
1,769	1,47%	1,937	0,23%	1,369	4,23%
2,369	5,10%	2,289	3,84%	2,042	6,06%
3,062	1,76%	3,017	6,12%	3,426	47,32%
3,992	22,16%	3,653	19,89%	4,793	58,73%
4,994	68,25%	4,534	51,99%	5,351	74,05%

Tabla 6.9 Diferencias entre datos experimentales y las soluciones analíticas 'Sol. Sin simplif.'. Figura 6.9; Figura 6.10; Figura 6.11.

Como era de esperar, las diferencias que se obtienen para la velocidad de 3,45 m/s son mayores que las obtenidas para las velocidades de 1,2 m/s y 2,55 m/s.

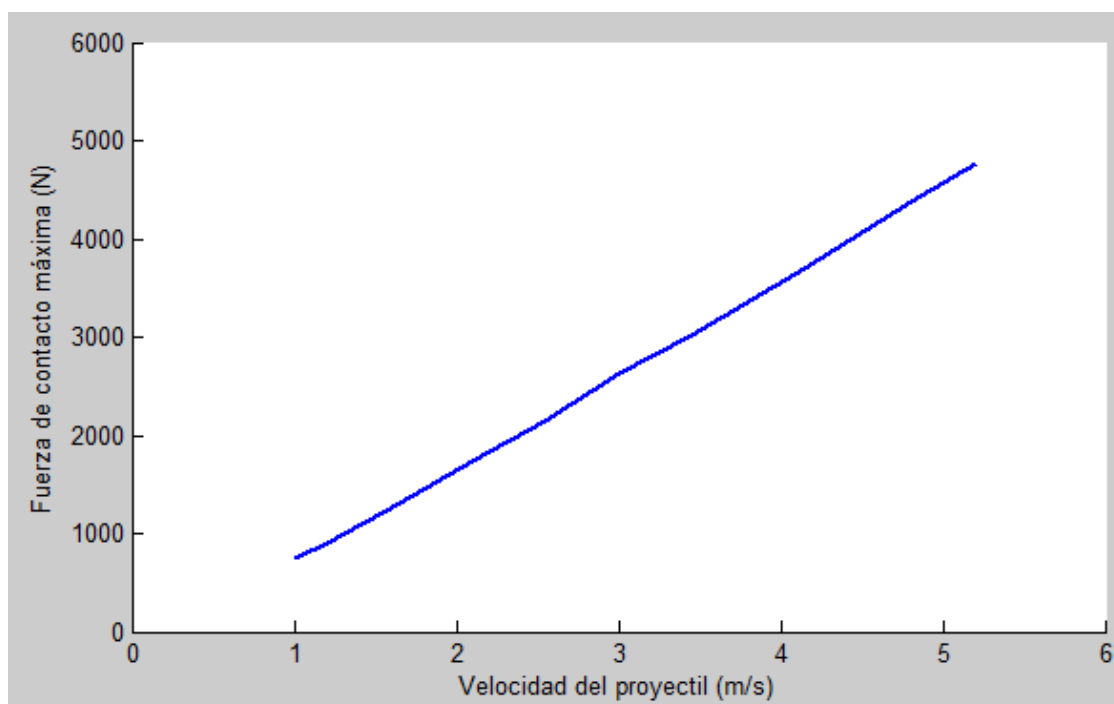
En la siguiente tabla se muestra la fuerza máxima de contacto y la diferencia entre los datos experimentales y las soluciones analíticas de las Figuras 6.9, 6.10 y 6.11:

	Fuerza de contacto máxima		
	Figura 6.9	Figura 6.10	Figura 6.11
Datos experimentales	882,3 N	1993 N	2470 N
Sol. Sin simplificaciones	900,1 N	2142 N	3013 N
Diferencia	2,13%	7,47%	21,98%

Tabla 6.10 Fuerza de contacto máxima. Diferencia entre datos experimentales y Sol. Sin simplificaciones. Figura 6.9; Figura 6.10; Figura 6.11.

Las diferencias de la fuerza de contacto máxima para las velocidades de 1,2 m/s y 2,55 m/s son bajas y menores que las obtenidas por Fatt y Park para paneles con parámetros distintos. Sin embargo, la fuerza de contacto máxima analítica para la velocidad de 3,45 m/s es un 22% mayor que la fuerza de contacto máxima experimental por lo que se analizará en el Panel 4 si para esta velocidad del proyectil se obtiene una diferencia tan elevada.

La siguiente figura muestra la fuerza de contacto máxima en función de la velocidad inicial del proyectil para el panel 3 de la Tabla 6.8:



*Figura 6.12 Fuerza de contacto máxima – velocidad inicial del proyectil.
Laminado [0/90]; Diámetro del proyectil: 38,1 mm; Espesor del núcleo: 25,4 mm*

Aunque se consideran impactos de baja velocidad aquellos impactos de hasta 10 m/s, se han considerado aquí velocidades comprendidas entre 1,2 m/s y 5,2 m/s, debido a que sólo se tienen datos experimentales para velocidades de hasta 3,45 m/s y realizar el análisis analítico para velocidades de 10 m/s puede ser irreal.

Como se observa en la Figura 6.12, la fuerza de contacto máxima varía de forma lineal respecto a la velocidad inicial del proyectil. Cuanto mayor es la velocidad inicial del proyectil, mayor será la fuerza de contacto máxima.

Para una velocidad de 1 m/s se obtiene una fuerza de contacto máxima de 746 N y para una velocidad de 5,2 m/s se obtiene una fuerza de contacto máxima mayor de 4800 N. Se puede comprobar que, al aumentar la velocidad inicial del proyectil en un metro por segundo, la fuerza de contacto máxima aumenta aproximadamente 1000 N.

A continuación se realiza el mismo proceso para el Panel 4.

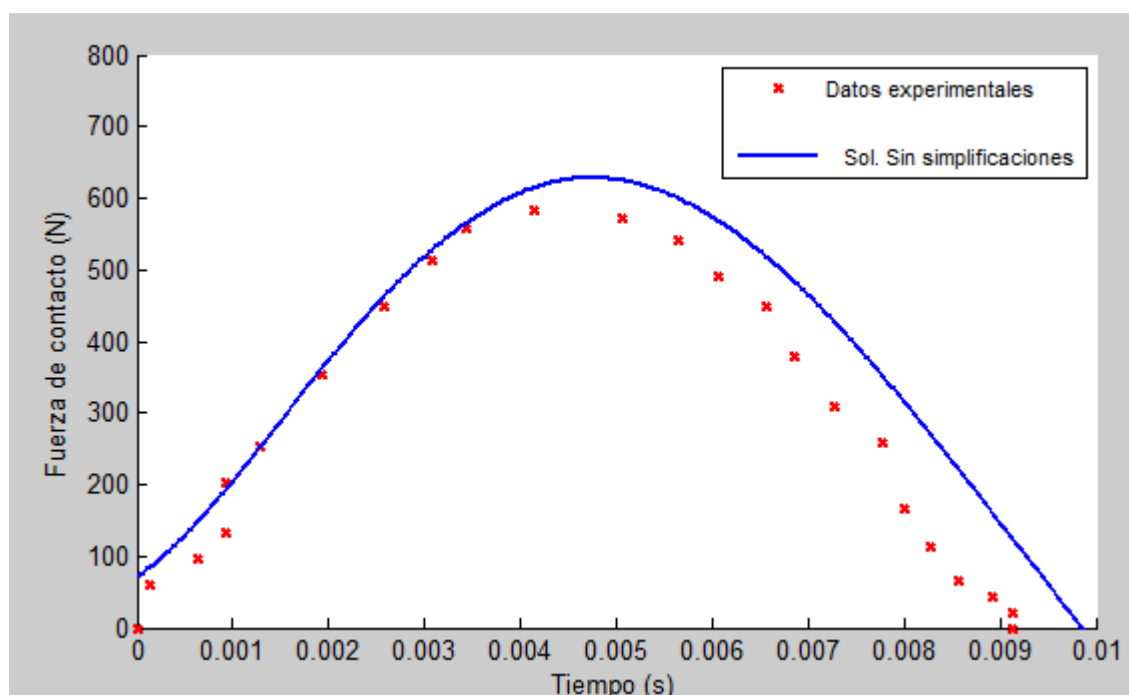


Figura 6.13 Fuerza de contacto – tiempo.

Laminado [0/90]; Diámetro del proyectil: 25.4 mm; Espesor del núcleo: 6.4 mm; Velocidad: 1.2 m/s

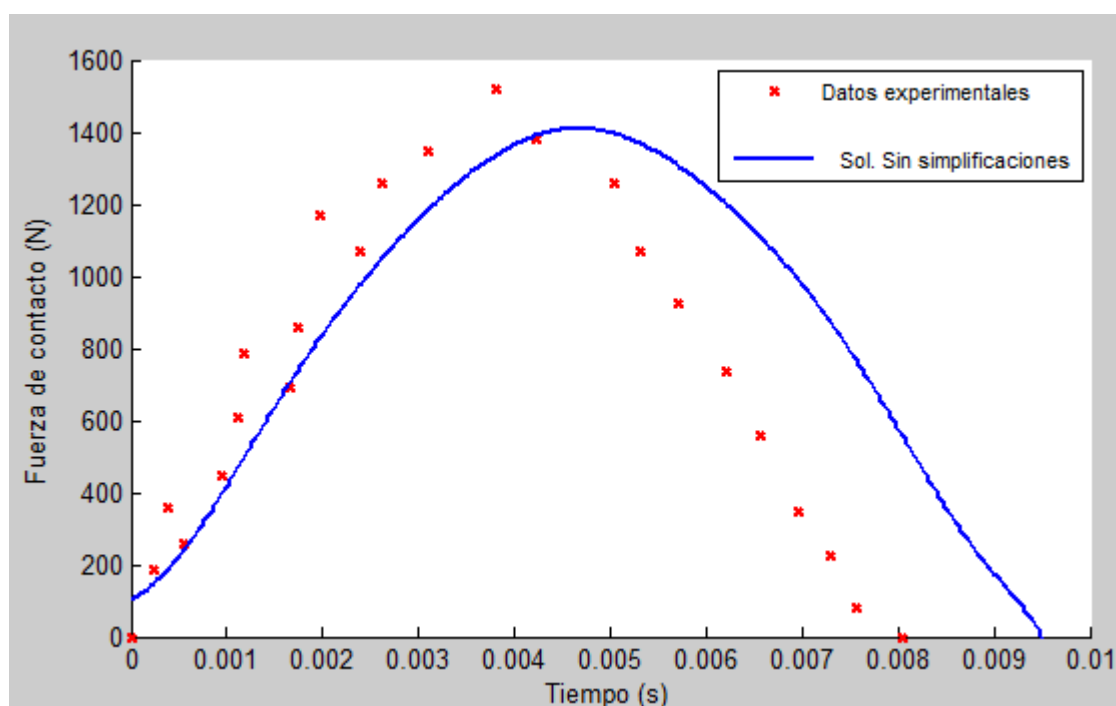


Figura 6.14 Fuerza de contacto – tiempo.

Laminado [0/90]; Diámetro del proyectil: 25.4 mm; Espesor del núcleo: 6.4 mm; Velocidad: 2.55 m/s

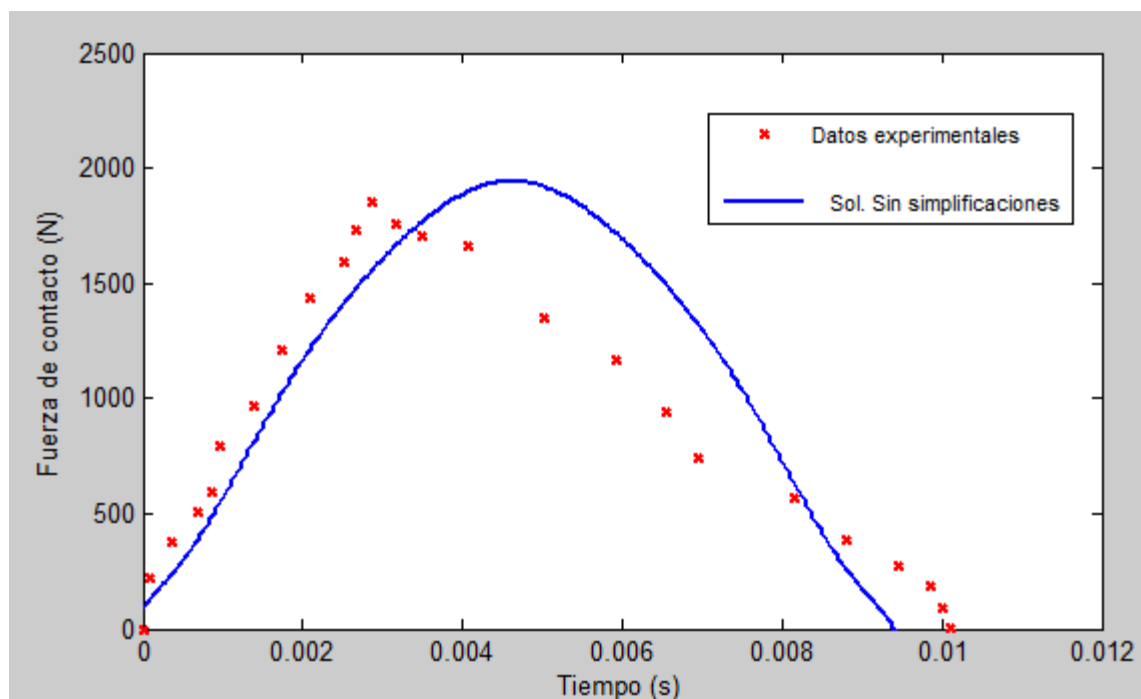


Figura 6.15 Fuerza de contacto – tiempo.

Laminado [0/90]; Diámetro del proyectil: 25.4 mm; Espesor del núcleo: 6.4 mm; Velocidad: 3.45 m/s

Al observar las Figuras, las soluciones analíticas del Panel 4 parecen mejores que las soluciones del Panel 3. Para el panel con la velocidad de 3,45 m/s, la solución del Panel 4 ha mejorado bastante en cuanto a una obtención más aproximada de la fuerza de contacto máxima.

A continuación se analizan las diferencias entre las soluciones analíticas y los datos experimentales de las Figuras 6.13, 6.14 y 6.15:

Figura 6.13		Figura 6.14		Figura 6.15	
Tiempo (s)	Sol. Sin simplif.	Tiempo (s)	Sol. Sin simplif.	Tiempo (s)	Sol. Sin simplif.
0,142	45,30%	0,234	9,51%	0,101	29,27%
0,928	4,71%	0,951	10,73%	0,868	15,37%
1,929	1,95%	1,670	2,60%	1,391	8,37%
2,571	2,71%	2,380	4,97%	2,511	7,13%
3,429	1,41%	3,100	7,40%	3,502	3,45%
5,071	8,99%	4,230	1,08%	4,071	14,34%
6,571	15,75%	5,720	41,34%	5,920	47,01%
7,786	35,32%	6,560	98,20%	6,950	77,55%

Tabla 6.11 Diferencias entre datos experimentales y las soluciones analíticas 'Sol. Sin simplif.'.

Figura 6.13; Figura 6.14; Figura 6.15.

En la siguiente tabla se muestra la fuerza de contacto máxima y la diferencia entre los datos experimentales y las soluciones analíticas:

	Fuerza de contacto máxima		
	Figura 6.13	Figura 6.14	Figura 6.15
Datos experimentales	587,1 N	1511 N	1850 N
Sol. Sin simplificaciones	627,4 N	1414 N	1943 N
Diferencia	6,81%	6,41%	5,02%

Tabla 6.12 Fuerza de contacto máxima. Diferencia entre datos experimentales y Sol. Sin simplificaciones.
Figura 6.13; Figura 6.14; Figura 6.15.

Las diferencias obtenidas para las velocidades de 1,2 m/s y 2,55 m/s del Panel 4 son similares a las del Panel 3. Sin embargo, para la velocidad de 3,45 m/s se obtienen diferencias un poco más elevadas a lo largo de la curva pero se obtiene una fuerza de contacto máxima mucho más aproximada a la real.

La siguiente figura muestra la fuerza de contacto máxima en función de la velocidad inicial del proyectil para el Panel 4

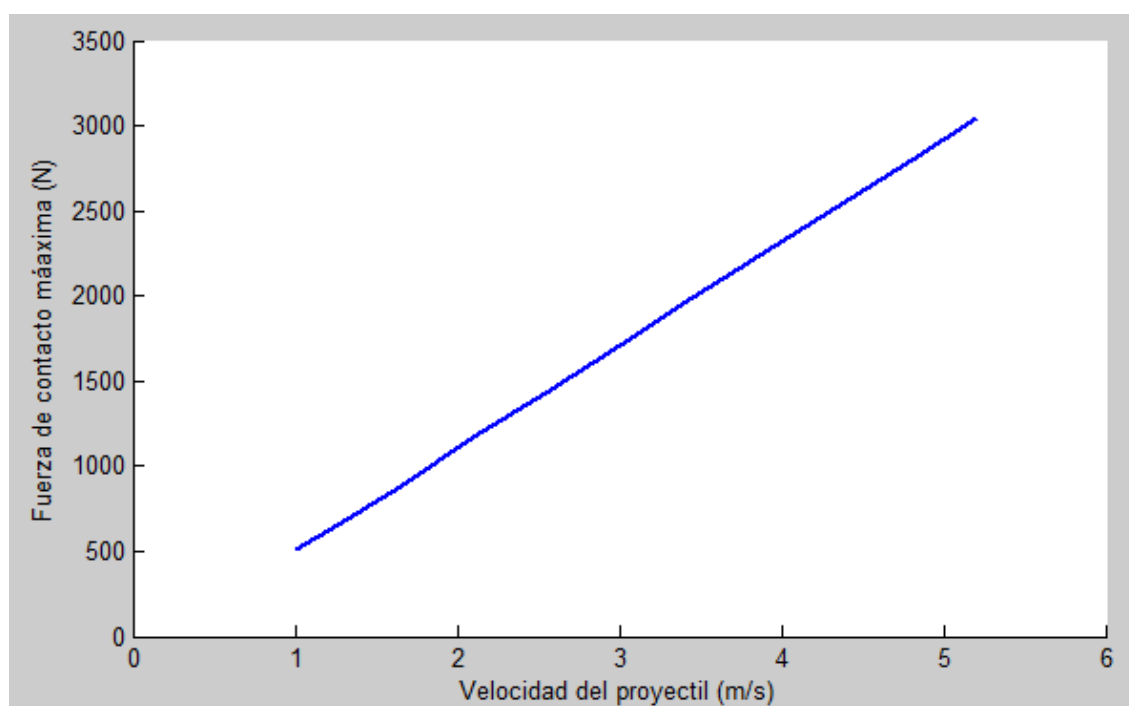


Figura 6.16 Fuerza de contacto máxima – velocidad del proyectil.
Laminado [0/90]; Diámetro del proyectil: 25.4 mm; Espesor del núcleo: 6.4 mm

Al observar la Figura 6.16, se verifica que la fuerza de contacto máxima varía de forma lineal con la velocidad inicial del proyectil, para velocidades comprendidas entre 1 m/s hasta 5,2 m/s. Para una velocidad de 1 m/s se obtiene una fuerza máxima de 513 N y para una velocidad de 5,2 m/s se obtiene una fuerza máxima de 3050 N.

A diferencia del Panel 3, en este caso, cuando la velocidad aumenta un metro por segundo, la fuerza de contacto máxima aumenta 600 N.

6.4. VARIACIÓN DEL DIÁMETRO DEL PROYECTIL

En este apartado se variará el diámetro del proyectil manteniendo fijo el resto de datos del problema. En la siguiente tabla se muestra los diferentes datos del problema:

Diámetros del proyectil		
12,7 mm	25,4 mm	38,1 mm

Tabla 6.13 Diferentes diámetros de proyectil.

Datos	Laminado	Espesor del núcleo	Velocidad del proyectil
Panel 5	[0/90]	25,4 mm	1,65 m/s

Tabla 6.14 Datos del problema del apartado 6.4.

En este caso sólo se analizará un panel, ya que no se tienen suficientes datos experimentales con los que comparar los resultados analíticos.

En las figuras siguientes se muestran las curvas fuerza de contacto – tiempo del Panel 5 con los diferentes diámetros del proyectil de la Tabla 6.13:

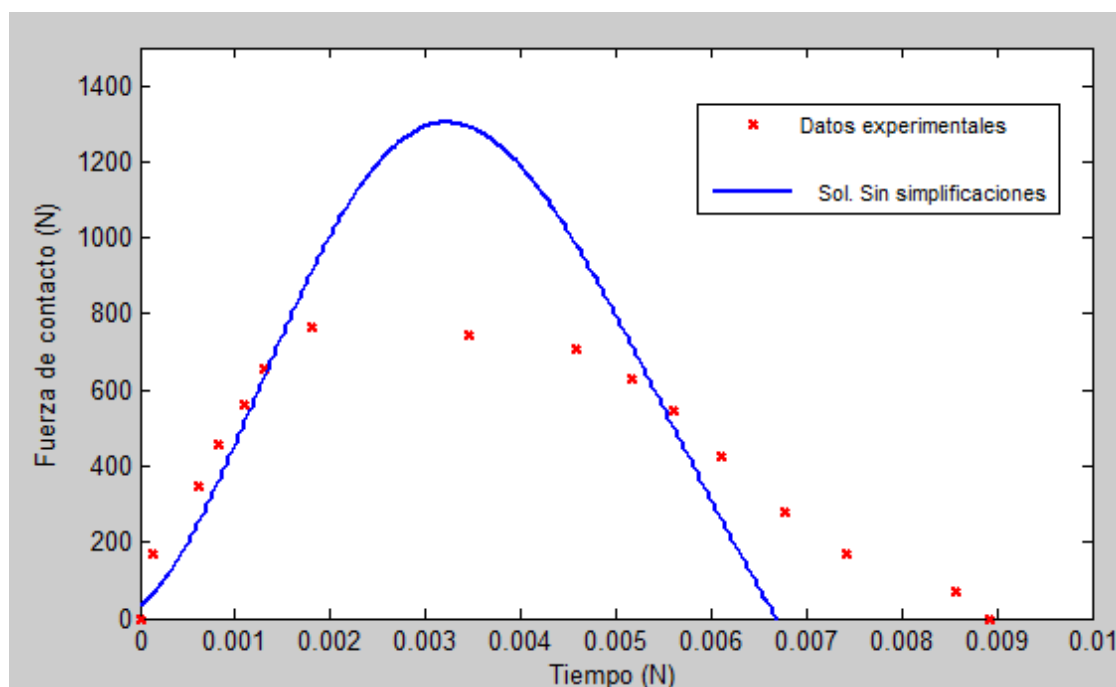


Figura 6.17 Fuerza de contacto - tiempo.

Laminado [0/90]; Espesor del núcleo: 25,4 mm; Velocidad: 1,65 m/s; Diámetro del proyectil: 12,7 mm

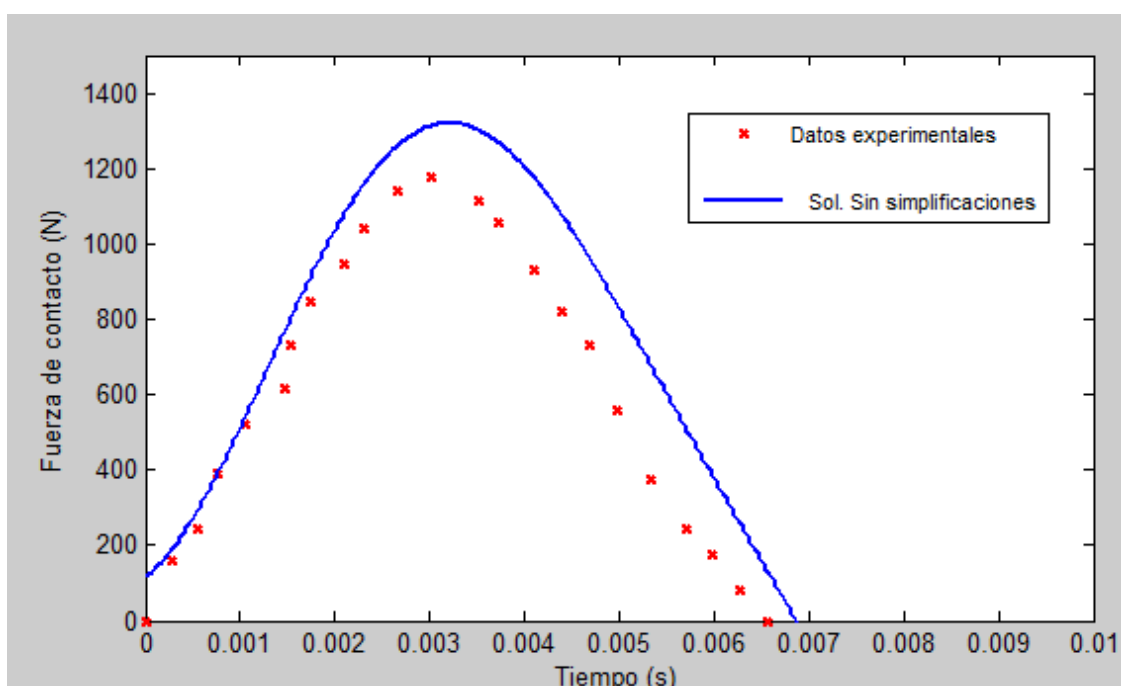


Figura 6.18 Fuerza de contacto - tiempo.

Laminado [0/90]; Espesor del núcleo: 25,4 mm; Velocidad: 1,65 m/s; Diámetro del proyectil: 25,4 mm

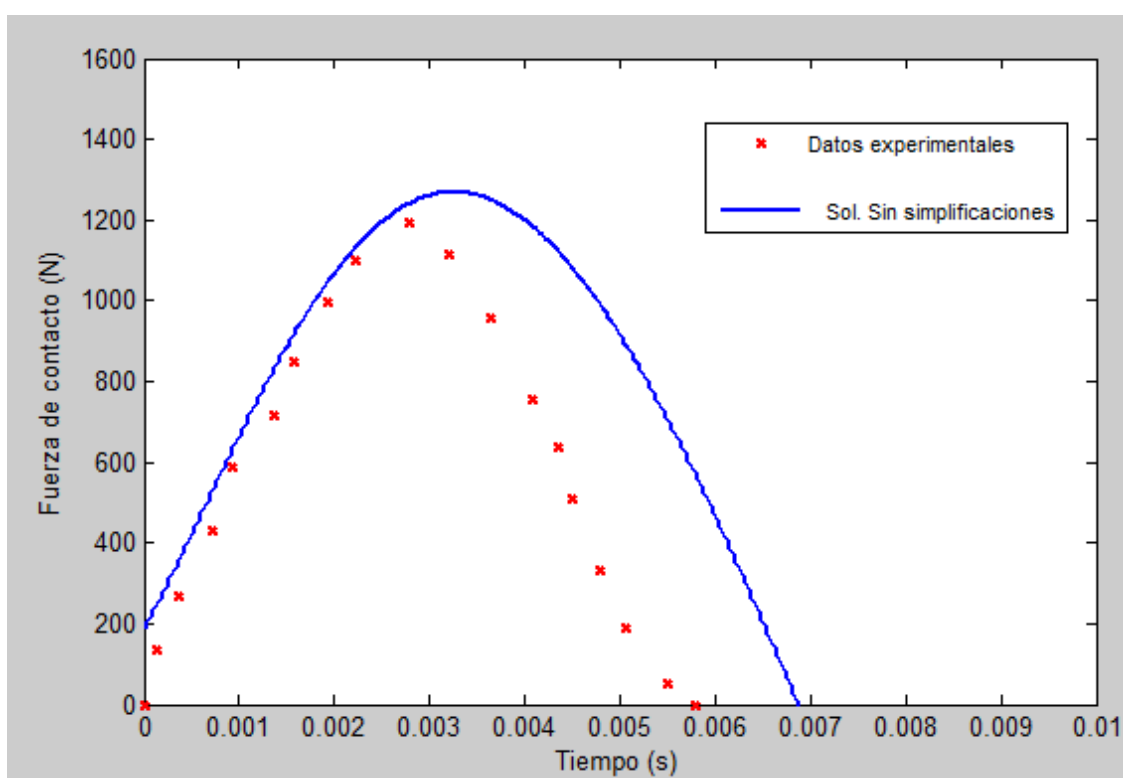


Figura 6.19 Fuerza de contacto - tiempo.

Laminado [0/90]; Espesor del núcleo: 25,4 mm; Velocidad: 1,65 m/s; Diámetro del proyectil: 38,1 mm

Observando las figuras anteriores, las soluciones analíticas del Panel 5 para los diámetros de 25,4 y 38,1 mm se ajustan bastante bien a los datos experimentales mientras que para un diámetro del proyectil de 12,7 mm, la solución analítica no se parece a los datos experimentales.

Las diferencias entre las soluciones analíticas y los datos experimentales de las Figuras 6.17, 6.18 y 6.19 se muestran en la Tabla 6.15:

Figura 6.17		Figura 6.18		Figura 6.19	
Tiempo (s)	Sol. Sin simplif.	Tiempo (s)	Sol. Sin simplif.	Tiempo (s)	Sol. Sin simplif.
0,131	57,04%	0,278	14,94%	0,357	15,95%
0,824	19,55%	0,767	0,59%	0,928	7,17%
1,311	5,41%	1,745	5,59%	1,929	4,97%
1,803	19,38%	2,308	8,83%	2,786	3,85%
4,592	7,07%	3,518	12,35%	3,643	30,30%
5,602	7,47%	4,679	27,87%	4,357	75,05%

*Tabla 6.15 Diferencias entre datos experimentales y las soluciones analíticas 'Sol. Sin simplif.'.
Figura 6.17; Figura 6.18; Figura 6.19.*

Las diferencias obtenidas para el diámetro de 12,7 mm son elevadas comparándolas con las obtenidas para los diámetros de 25,4 mm y 38,1 mm.

En la siguiente tabla se muestra la fuerza de contacto máxima y la diferencia entre los datos experimentales y las soluciones analíticas del Panel 5:

	Fuerza de contacto máxima		
	Figura 6.17	Figura 6.18	Figura 6.19
Datos experimentales	790 N	1182 N	1194 N
Sol. Sin simplificaciones	1298 N	1312 N	1289 N
Diferencia	64,30%	10,99%	7,95%

*Tabla 6.16 Fuerza de contacto máxima. Diferencia entre datos experimentales y Sol. Sin simplificaciones.
Figura 6.17; Figura 6.18; Figura 6.19.*

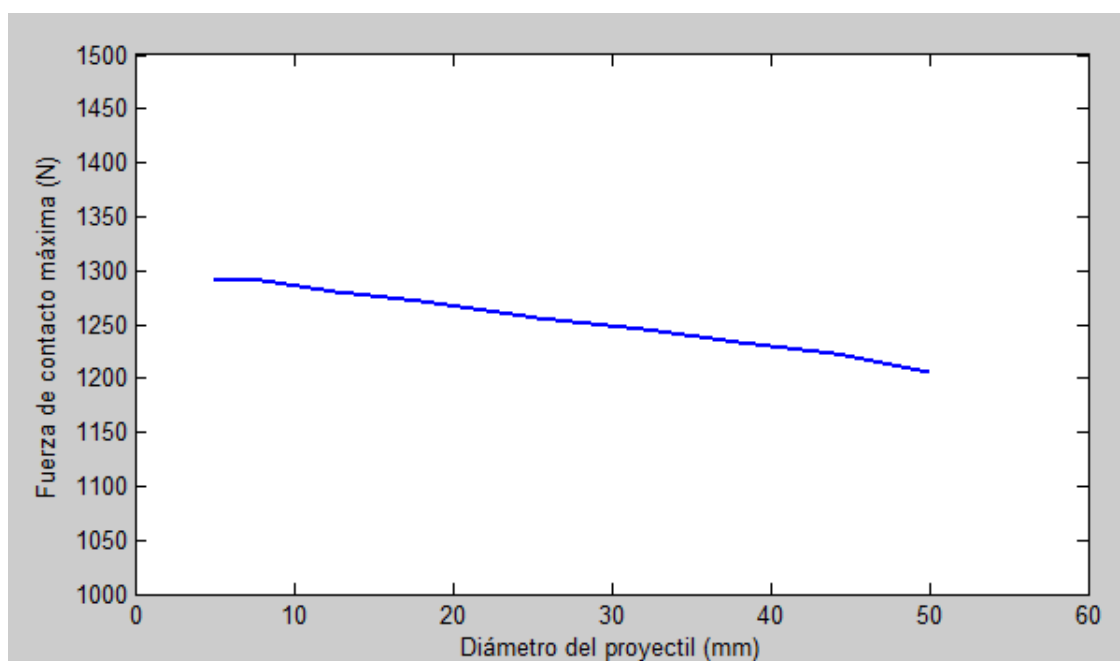
La diferencia entre la solución analítica y los datos experimentales de la Figura 6.17 es muy elevada. Ya se ha comentado anteriormente que, para un diámetro de proyectil de 12,7 mm, la solución analítica se desvía mucho de los datos experimentales.

Si se observa la Tabla 6.16, se puede comprobar que la fuerza de contacto máxima experimental para el diámetro de 25,4 mm y 38,1 mm es prácticamente el mismo, sin embargo existe mucha diferencia con el de diámetro 12,7 mm por lo que se llega a la conclusión que el resultado experimental pudo verse afectado por alguna causa externa, ya que este resultado no es coherente con los demás. Esto puede ser un motivo por el que se encuentre tanta diferencia entre el resultado analítico y el experimental.

Respecto a las otras dos figuras, las diferencias entre la solución analítica y experimental de la fuerza de contacto máxima son valores admisibles, aunque en este caso, la diferencia es algo mayor que para los paneles analizados anteriormente.

Como se ha explicado en el apartado 4.2, la masa del proyectil varía según el diámetro del proyectil, por lo que para obtener una relación entre la fuerza de contacto máxima y el diámetro del proyectil habrá que independizar la masa del diámetro. También se podrá obtener la relación entre la fuerza de contacto máxima y la masa del proyectil.

La siguiente figura muestra como varía la fuerza de contacto máxima respecto del diámetro del proyectil. En este caso, la masa del proyectil es constante e igual a 1,50 Kg.



*Figura 6.20 Fuerza de contacto máxima – diámetro del proyectil.
Laminado [0/90]; Espesor del núcleo: 25,4 mm; Velocidad: 1,65 m/s. Masa del proyectil: 1,50 Kg*

Los valores del diámetro del proyectil que se han analizado están comprendidos entre 5 mm y 50 mm para no alejarse demasiado de los valores del diámetro del proyectil de los que se tienen resultados experimentales.

Como se observa en la Figura 6.20, la fuerza de contacto máxima que se produce en un impacto de baja velocidad disminuye lentamente cuanto mayor es el diámetro del proyectil que impacta en el panel.

Este resultado no se contradice a los datos experimentales mostrados en la Tabla 6.16, donde se puede ver que la fuerza de contacto máxima experimental aumenta con el diámetro del proyectil. Hay que tener en cuenta que, en esos resultados, no sólo se aumenta el diámetro del proyectil, sino que también se está aumentando la masa, como se explicó anteriormente.

A continuación se analizará como varía la masa del proyectil por lo que se deberá mantener constantes el resto de parámetros del problema, incluido el diámetro del proyectil. Los datos del problema que se usarán serán los mismos que el Panel 5 y el diámetro del proyectil será 38,1 mm.

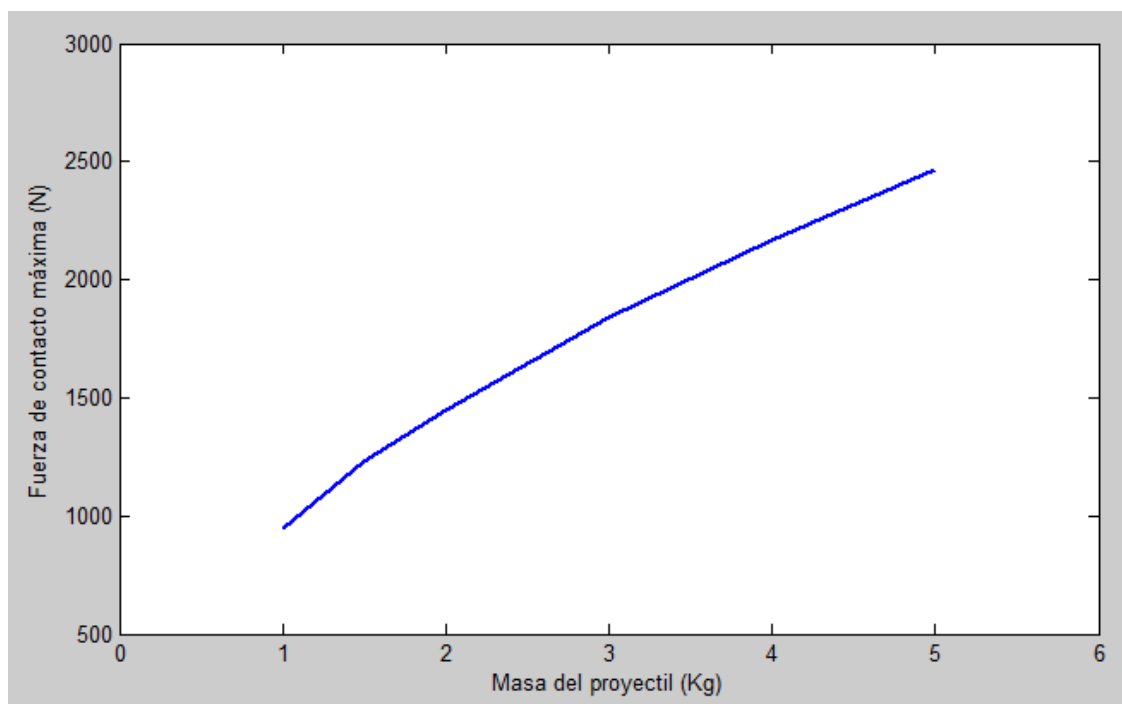


Figura 6.21 Fuerza de contacto máxima – masa del proyectil.
Laminado [0/90]; Espesor del núcleo: 25,4 mm; Velocidad: 1,65 m/s. Diámetro del proyectil: 38,1 mm

En el análisis que se ha realizado se han utilizado valores de la masa del proyectil entre 1 Kg y 5 Kg. La fuerza de contacto máxima varía de forma lineal respecto de la masa del proyectil. La fuerza de contacto aumenta significativamente cuanto mayor es la masa del proyectil.

Cuando se tiene un proyectil de 1 Kg se alcanza una fuerza de contacto máxima de 1000 N aproximadamente y cuando se tiene un proyectil de 5 Kg se alcanza una fuerza de contacto máxima de algo menos de 2500 N por lo que con un mínimo aumento de la masa del proyectil se produce un gran aumento de la fuerza de contacto.

6.5. VARIACIÓN DEL LAMINADO

En este apartado se variará el laminado del panel sándwich manteniendo fijo el resto de datos del problema. En la siguiente tabla se muestra los diferentes datos del problema:

Laminado		
[0/90]	[0/90/0]	[0/90] ₂

Tabla 6.18 Diferentes laminados del panel sándwich.

Datos	Espesor del núcleo	Diámetro del proyectil	Velocidad del proyectil
Panel 6	25.4 mm	25.4 mm	1,20 m/s

Tabla 6.19 Datos del problema del apartado 6.5.

Al igual que en el análisis de la variación del diámetro del proyectil, en este caso sólo se mostrarán las soluciones de un panel para diferentes configuraciones del laminado, ya que no se tienen más datos experimentales con las que comparar los resultados analíticos.

A continuación se muestran las curvas fuerza de contacto – tiempo del Panel 6 con los diferentes laminados de la Tabla 6.18.

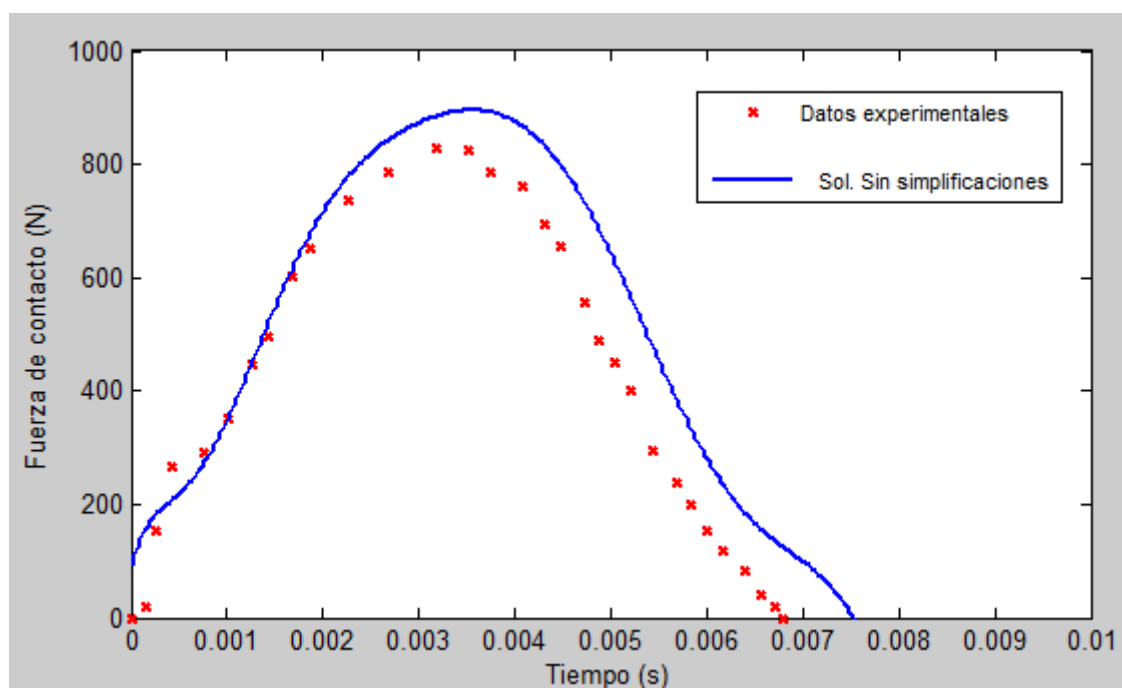


Figura 6.22 Fuerza de contacto – tiempo.

Diámetro del proyectil: 25,4; Espesor del núcleo: 25,4 mm; Velocidad: 1,2m/s; Laminado [0/90]

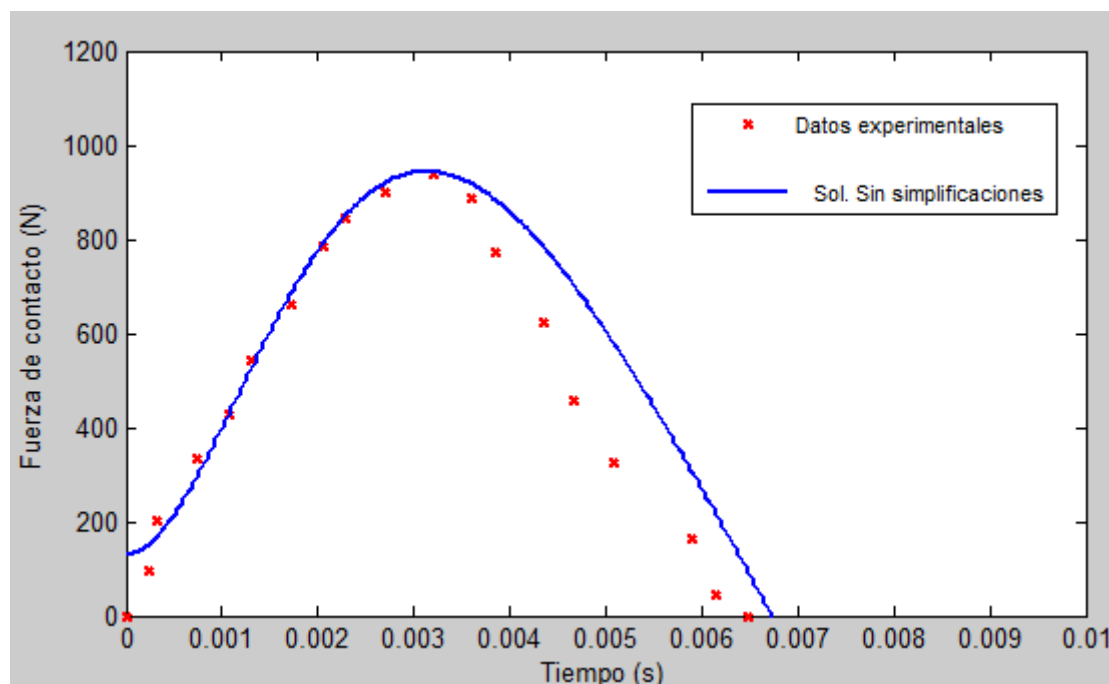


Figura 6.23 Fuerza de contacto – tiempo.

Diámetro del proyectil: 25,4 mm; Espesor del núcleo: 25,4 mm; Velocidad: 1,2m/s; Laminado [0/90/0]

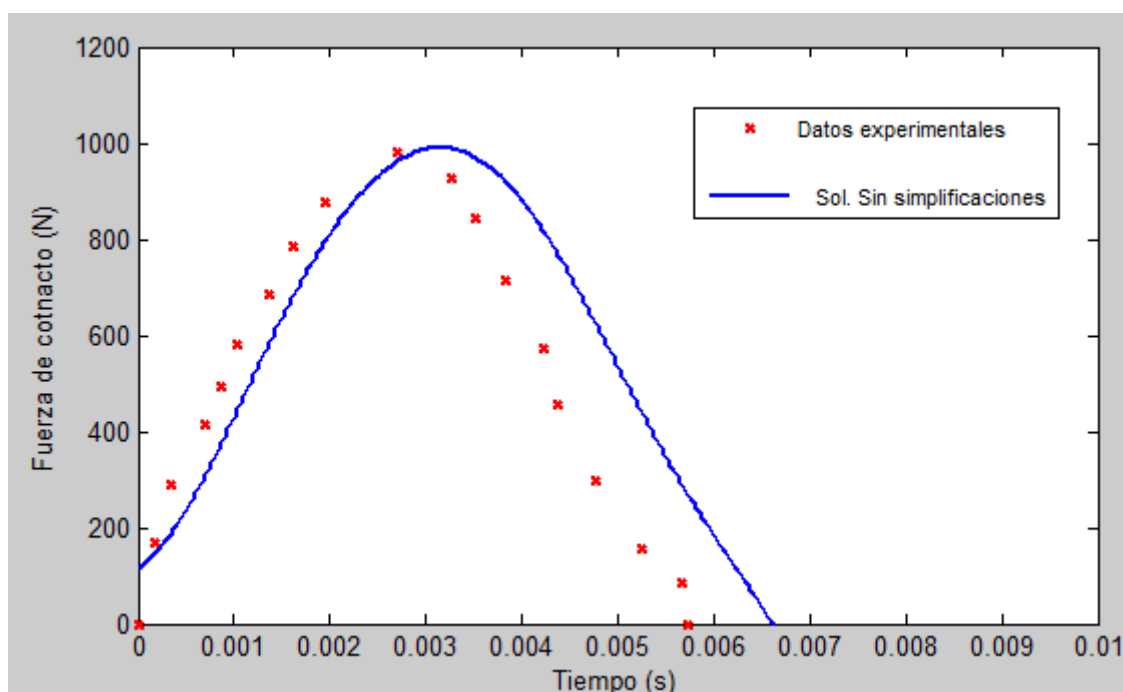


Figura 6.24 Fuerza de contacto – tiempo.

Diámetro del proyectil: 25,4 mm; Espesor del núcleo: 25,4 mm; Velocidad: 1,2m/s; Laminado [0/90]₂

Las diferencias entre las soluciones analíticas de las Figuras 6.22, 6.23 y 6.24 respecto de los datos experimentales se muestran en la siguiente tabla:

Figura 6.22		Figura 6.23		Figura 6.24	
Tiempo (s)	Sol. Sin simplif.	Tiempo (s)	Sol. Sin simplif.	Tiempo (s)	Sol. Sin simplif.
0,262	9,54%	0,327	9,19%	0,177	9,77%
0,762	2,92%	1,066	0,68%	0,860	12,84%
1,430	6,06%	2,049	0,26%	1,368	8,58%
2,270	5,62%	2,705	2,46%	1,957	6,44%
3,180	8,28%	3,197	2,20%	2,703	1,41%
4,080	8,65%	3,853	16,82%	3,273	6,86%
4,720	29,73%	4,672	50,08%	4,227	39,70%

Tabla 6.3 Diferencias entre datos experimentales y la solución analítica 'Sol. Sin simplif.'. Figuras 6.22; Figuras 6.23; Figuras 6.24.

Las diferencias que se obtienen entre las soluciones analíticas y los datos experimentales son bajas, especialmente en la primera parte de la curva. En la parte final de la curva se encuentran mayores diferencias aunque menores que para los paneles analizados con datos diferentes.

En la siguiente tabla se muestra la fuerza de contacto máxima y la diferencia entre los datos experimentales y las soluciones analíticas:

	Fuerza de contacto máxima		
	Figura 6.22	Figura 6.23	Figura 6.24
Datos experimentales	841,2 N	937,1 N	981,5 N
Sol. Sin simplificaciones	895,3 N	943,6 N	990,5 N
Diferencia	6,43%	2,24%	0,92%

Tabla 6.20 Fuerza de contacto máxima. Diferencia entre datos experimentales y Sol. Sin simplificaciones. Figura 6.22; Figura 6.23; Figura 6.24.

Las fuerzas de contacto máximas de las Figuras 6.22, 6.23 y 6.24 obtenidas analíticamente con el modelo del apartado 5.4 se aproximan mucho a los datos experimentales. La diferencia que se obtiene para el laminado [0/90] es similar a la obtenida en los paneles analizados anteriormente. Para los laminados [0/90/0] y [0/90]₂, las diferencias obtenidas son muy bajas por lo que los resultados obtenidos para el Panel 6 son bastante acertados.

Al modificar el laminado del panel, se está variando la rigidez local del laminado y la rigidez global del panel sándwich. A continuación se analizará como varía la fuerza de contacto en función de cada una de estas propiedades por separado, las cuales se han calculado en el apartado 4.3.

En la siguiente tabla se muestran los valores de la rigidez local del laminado y la rigidez global del panel para los laminados de las Figuras 6.22, 6.23 y 6.24 y las de un panel sándwich con un laminado [0] y [0/90/+45/-45], ya que estos laminados suelen ser muy usados en la fabricación de paneles sándwich:

K_{ld} = Rigidez local del laminado.

K_{gd} = Rigidez global del panel sándwich.

	[0/90]	[0/90/0]	[0/90] ₂	[0]	[0/90/+45/-45]
K_{ld} (N/m)	$1,1161 \times 10^7$	$1,3670 \times 10^7$	$1,5784 \times 10^7$	$7,8921 \times 10^6$	$1,7872 \times 10^7$
K_{gd} (N/m)	$1,0394 \times 10^6$	$1,0505 \times 10^6$	$1,0563 \times 10^6$	$1,0075 \times 10^6$	$1,0563 \times 10^6$

Tabla 6.21 Rigidez local de la piel superior y rigidez global del panel sándwich para diferentes laminados.

En la siguiente figura se muestra como varía la fuerza de contacto máxima respecto de la rigidez local de la piel superior, para unos valores desde $7,0 \cdot 10^6$ N/m hasta $2,0 \cdot 10^7$ N/m. Se han considerado realizar el análisis con estos valores para ampliar el rango obtenido en la Tabla 6.21. La rigidez global del panel sándwich se mantiene constante e igual a $1,0563 \cdot 10^6$ N/m.

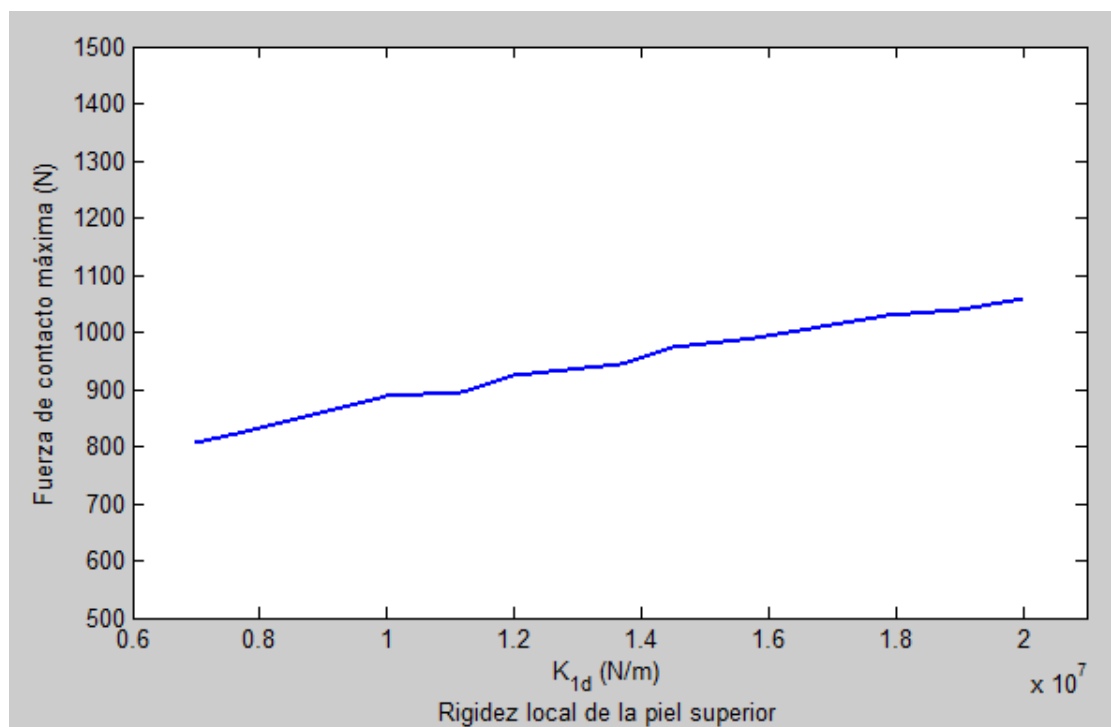


Figura 6.25 Fuerza de contacto – K_{ld} .

Diámetro del proyectil: 25,4 mm; Espesor del núcleo: 25,4 mm; Velocidad: 1,2m/s; K_{gd} : $1,0563 \cdot 10^6$ N/m

Como se muestra en la figura, la fuerza de contacto máxima varía de forma lineal respecto de la rigidez local de la piel superior para los valores que se han comentado anteriormente. La fuerza de contacto aumenta de forma constante según aumenta la rigidez local de la piel superior.

A continuación se muestra como varía la fuerza de contacto máxima respecto de la rigidez global del panel sándwich, para unos valores desde $6,0 \cdot 10^5$ N/m hasta $1,1 \cdot 10^6$ N/m. Al igual que en el análisis de la rigidez local de la piel superior, se toman estos valores para ampliar los valores obtenidos de la Tabla 6.21. En este caso, la rigidez local de la piel superior se mantiene constante e igual a $1,5784 \cdot 10^7$ N/m.

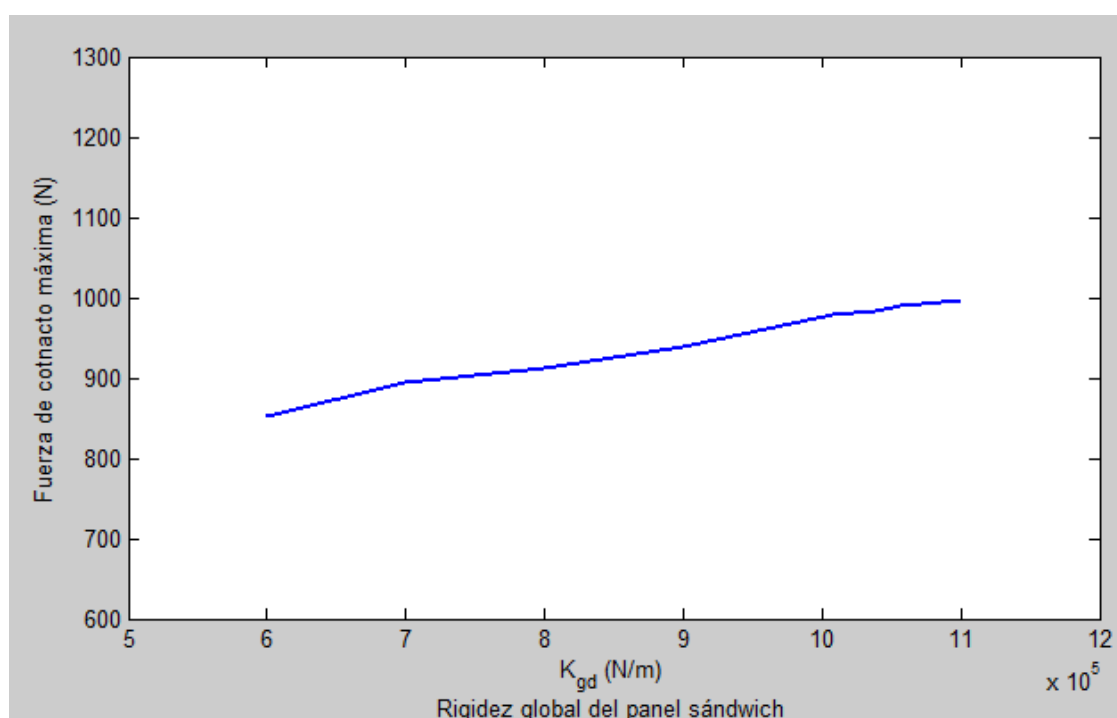


Figura 6.26 Fuerza de contacto – K_{gd} .

Diámetro del proyectil: 25,4 mm; Espesor del núcleo: 25,4 mm; Velocidad: 1,2m/s; K_{ld} : $1,5784 \cdot 10^7$

Al igual que para la rigidez local de la piel superior, la fuerza de contacto máxima varía de forma lineal respecto de la rigidez global del panel sándwich, como se puede ver en la Figura 6.26. La fuerza de contacto máxima aumenta cuanto mayor es la rigidez global del panel sándwich.

Capítulo 7

CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS

7.1. RESUMEN Y CONCLUSIONES

En este proyecto se ha realizado un análisis sobre el comportamiento de un panel sándwich frente a impacto de baja velocidad. El panel sándwich estudiado tiene un laminado ortótropo y simétrico y el núcleo es de tipo nido de abeja. Para realizar este análisis, se ha utilizado un modelo analítico en el que se puede distinguir dos partes: modelo estático y modelo dinámico. Se ha analizado las partes más problemáticas del modelo y se han obtenido resultados del modelo estático y del modelo dinámico. Estos resultados se han comparado con datos experimentales y soluciones analíticas para comprobar la validez de dicho modelo.

En el modelo estático, a partir del cual se obtiene la fuerza de indentación respecto del desplazamiento total del panel sándwich, la curva obtenida se ajusta mejor a los datos experimentales en la mayoría de los puntos analizados, frente a la solución dada por Fatt y Park, existiendo una diferencia media de 5% entre los resultados analíticos y los datos experimentales.

En el modelo dinámico, a partir del cual se obtiene la fuerza de contacto entre el proyectil y el panel sándwich en función del tiempo, la solución encontrada en este proyecto difiere significativamente de la solución analítica dada por Fatt y Park, cuya solución no coincide con las ecuaciones planteadas en el modelo analítico debido a que según este modelo, en el instante inicial, siempre se obtendrá una fuerza de contacto igual a la fuerza de resistencia al aplastamiento del núcleo. Además, la curva analítica obtenida en este proyecto difiere de la obtenida por Fatt y Park debido a más motivos como la linealización de la rigidez dinámica local de la piel superior.

Se han propuesto diferentes modelos analíticos para mejorar los resultados obtenidos en los que se planteaba el modelo dinámico sin realizar las simplificaciones del modelo inicial. Como era de esperar, las soluciones analíticas que más se aproximan a los datos experimentales se obtuvieron en el modelo en el que no se resolvían las ecuaciones del modelo dinámico sin realizar ninguna simplificación. En la mayoría de los paneles analizados, los resultados analíticos se ajustan perfectamente en la primera parte de la curva experimental mientras que se alejan en la parte final de la curva. Este hecho puede ser debido a que este modelo analítico no tiene en cuenta el daño producido en el panel sándwich. Antes de que se produzca el daño en el panel sándwich, este modelo se ajusta bastante bien a los datos experimentales, sin embargo, una vez producido el daño, se obtiene una fuerza de contacto mayor a la real.

Una vez validado y mejorado el modelo analítico, se ha realizado un estudio paramétrico en el que se ha pretendido comprobar como varía la fuerza de contacto máxima en función de distintos parámetros como son el espesor del núcleo, la velocidad inicial del proyectil, el diámetro del proyectil, la masa del proyectil y la configuración del laminado. Sin tener en cuenta casos puntuales, que se han explicado en el Capítulo 6, en los que la diferencia ha sido muy elevada, en este análisis, se ha encontrado una diferencia media del 6% entre los resultados analíticos y los datos experimentales.

En el estudio paramétrico se ha concluido que la fuerza de contacto máxima varía de forma logarítmica en función del espesor del núcleo, aumentando la fuerza cuanto mayor sea el espesor del núcleo. Esto ocurre para valores del núcleo comprendidos entre 5 mm y 60 mm. Para valores del espesor del núcleo altos, la fuerza de contacto tiende a estabilizarse.

Respecto de la velocidad inicial del proyectil, la fuerza de contacto máxima varía de forma lineal. Cuanto mayor es la velocidad del proyectil, mayor será la fuerza de contacto máxima, aumentando significativamente para cambios pequeños de la velocidad inicial del proyectil. Los valores de la velocidad del proyectil que se han usado en este análisis comprenden desde 1 m/s hasta 5,2 m/s.

La fuerza de contacto máxima disminuye linealmente cuanto mayor es el diámetro del proyectil. El rango de valores del diámetro del proyectil que se ha analizado comprende desde 5 mm hasta 50 mm. La variación de la fuerza de contacto máxima que se produce en estos valores es muy pequeña. En cuanto a la masa del proyectil, la fuerza de contacto varía de forma lineal. Un pequeño aumento de la masa del proyectil provoca un aumento significativo en la fuerza de contacto máxima.

Al modificar la configuración del laminado se modifica la rigidez local del laminado y la rigidez global del panel sándwich, por lo que el análisis se ha realizado en función de estos dos parámetros. Se ha determinado que la fuerza de contacto máxima aumenta de forma lineal respecto de ambos parámetros.

7.2. TRABAJOS FUTUROS

Como posibles trabajos futuros que podrían ampliar el estudio realizado en este Proyecto Fin de Carrera, se proponen los siguientes:

- Extender el estudio realizado en este proyecto mediante la realización de ensayos experimentales de impactos, ampliando los rangos de los parámetros estudiados en este proyecto: velocidad inicial del proyectil, masa y diámetro del proyectil, espesor del núcleo y configuración del laminado. Realizar el estudio analítico con estos parámetros para comprobar la validez del modelo al comparar los resultados analíticos con los nuevos datos experimentales.
- Aplicar el modelo analítico a paneles sándwich con propiedades diferentes a las analizadas en este proyecto. Se propone como ejemplo comprobar el modelo para un panel sándwich con núcleo de espuma, en lugar de un núcleo de nido de abeja.
- Desarrollar el modelo analítico en función de parámetros adimensionales para comprobar el comportamiento de la estructura sándwich independientemente de parámetros que afectan directamente al problema de impacto.
- Desarrollar el modelo analítico para aplicarlo a paneles sándwich con diferentes condiciones de contorno. Se propone como ejemplo realizar el análisis de un panel sándwich simplemente apoyado y con los cuatro lados empotrados. Para ello sólo se debería modificar el modelo estático ya que el modelo dinámico es compatible con estas condiciones de contorno.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Hoo Fatt M. S., Park K. S. "Dinamyc models for low velocity impact damage of composite sandwich panels – Part A: Deformation". *Composite Structures* 52, 335-351. (2001).

Hoo Fatt M. S., Park K. S. "Dinamyc models for low velocity impact damage of composite sandwich panels – Part B: Damage initiation". *Composite Structures* 52, 353-364. (2001).

Turk M. H., Hoo Fatt M. S. "Localized damage response of composite sandwich plates". *Composites: Part B* 30, 157-165. (1999).

Williamson J. E. "Response mechanism in the impact of graphite/epoxy honeycomb sandwich panels". *Proceeding of the Eighth ASC Technical Conference, Cleveland, OH*, 287-97. (1991).

Miravete A., "Materiales compuestos Vol. I y II". Reproducciones, S. A., (2000).

Abrate S., "Impact on composite structures". Cambridge University Press; (1998).

Abrate S., "Impact engineering of composite structures". International Centre for Mechanical Sciences; (2011).

Foo C. C., Seah L. K., Chai G. B. "Low velocity impact failure of aluminium honeycomb sandwich panels". *Composite Structures* 85, 20-28. (2008).

Cantwell W. L., Morton J., "Impact perforation of carbon fiber reinforced plastic". *Composite Science and Technology*, Vol 38: 119-141. (1990).

Kasano H., "Recent advances in high-velocity impact perforation of fiber composite laminate", *JSME International journal*, 42,2: 147-157. (1999).

Hoo Fatt M. S., Sirivolu D., "Impact perforation of composite sandwich panels". 16TH International Conference on Composite Materials.

Akin C., Şenel M., "An experimental study of low velocity impact response for composite laminated plates". Dumlupınar university. (2010).

Leijten J., E.N. Harald., Bergsma O.K., Beukers A., "Experimental study of the low-velocity impact behaviour of primary sandwich structures in aircraft". *Composites: Part A* 40: 164-175. (2009).

Anderson T., Madenci E., " Experimental investigation of low-velocity impact characteristics of sandwich composites ". Composite Structures 50, 239-247. (2000).

Yu J., Wang E., Li J., Zheng Z., " Static and low-velocity impact behavior of sandwich beams with closed-cell aluminum-foam core in three point bending". International journal, of impact engineering 35: 885-894. (2008).

Shivakumar KN., Elber W., Illg W. " Prediction of impact force and duration due to low velocity impact on circular composite laminates ". J Appl Mech 52: 674-80. (1985).

ANEXO. PROGRAMACIÓN DEL MODELO ANALÍTICO EN MATLAB.

A) Modelo estático local.

Panel sándwich: Laminado [0/90]; Espesor del núcleo: 25.4 mm; Diámetro del proyectil: 25.4 mm

Ventana de edición:

```
- function[v21,Req,Q,Q90,A,C1,w1,w2,u1,u2,d1,d2,W,En,T,T2,T3,T4,T5,E,T6,Def,X,
Deflexion]=Est_local(x,y,e,w0,Re,A11,A12,A22,A66,r,q,pi,o,P,v12,E1,E2,G12,R,q1,h
k)

- %Deformación local

- v21 = v12*(E2/E1);
- Req =0.4*R;
- Q = [E1/(1-v12*v21) E2*v12/(1-v12*v21) 0;E1*v21/(1-v12*v21) E2/(1-v12*v21) 0;0
0 G12];
- Q90 = [E2/(1-v12*v21) E2*v12/(1-v12*v21) 0;E1*v21/(1-v12*v21) E1/(1-v12*v21)
0;0 0 G12];
- A = (Q + Q)*hk;
- C1=8*((A(1)+A(5))/45)+((2*A(2)+4*A(9))/49));
- w1 = w0;
- w2 = w0 * (1 - ((x-Re)/(e-Re)))^2 * (1 - ((y-Re)/(e-Re)))^2;
-u1=(1/8)*int(int((A11)*(diff(w1,x)^4))+((A22)*(diff(w1,y)^4))+((2*A12)+
(4*A66))*(diff(w1,x)^2)*(diff(w1,y)^2),x,e,Re),y,e,Re);
-u2=(1/2)*int(int((A11)*(diff(w2,x)^4))+((A22)*(diff(w2,y)^4))+((2*A12)+
(4*A66))*(diff(w2,x)^2)*(diff(w2,y)^2),x,e,Re),y,e,Re);
- d1=int(int(q*w1*r,r,0,Re),o,0,2*pi);
- d2=2*int(2*int(q*w2,x,Re,e),y,Re,e);
- W=int(int((P/(pi*Re^2))*w1*r,r,0,Re),o,0,2*pi);
- En=u1+u2+d1+d2-W;
- T=diff(En,w0);
- T2=solve(T,P);
- T3=diff(T2,e);
- T4=solve(T3,w0);
- T5=T4(1);
- E=Re+sqrt((9*(P-(pi*q*Re^2)))/(8*q));
- T6=subs(T5,e,E);
- Def=subs(T6,{pi,q,Re,A11,A12,A22,A66},{3.1415,q1,Req,A(1),A(2),A(5),A(9)});
- X=linspace(100,1000,12);
- Deflexion=subs(Def,P,X);
- hold on
- plot(Deflexion,X);
- hold off
```

Ventana de comandos:

```
- syms x
- syms y
- syms e
- syms w0
- syms Re
- syms A11
- syms A12
- syms A22
- syms A66
- syms r
- syms q
- syms pi
- syms o
- syms P
- v12 = 0.3
- E1 = 142000
- E2 = 9800
- G12 = 7100
- R = 12.7
- q1 = 1.389
- hk = 0.175
- [v21,Req,Q,Q90,A,C1,w1,w2,u1,u2,d1,d2,W,En,T,T2,T3,T4,T5,E,T6,Def,X,Deflexion]
=Est_local(x,y,e,w0,Re,A11,A12,A22,A66,r,q,pi,o,P,v12,E1,E2,G12,R,q1,hk)
```

B) Modelo estático total.

Panel sándwich: Laminado [0/90]; Espesor del núcleo: 25.4 mm; Diámetro del proyectil: 25.4 mm

Ventana de edición:

```
-function[v21,Q,Q90,A,Req,C1,Ynumg,i,v1,v2,D11,S,K,g,e,G]=Modelo_estatico_total
(P,E1,E2,G12,v12,R,hk,q,a,b,p,H,Gc)

- %Modelo estático local

- v21 = v12*(E2/E1);
- Q = [E1/(1-v12*v21) E2*v12/(1-v12*v21) 0;E1*v21/(1-v12*v21) E2/(1-v12*v21) 0;0
0 G12];
- Q90 = [E2/(1-v12*v21) E2*v12/(1-v12*v21) 0;E1*v21/(1-v12*v21) E1/(1-v12*v21)
0;0 0 G12];
- A = (Q + Q90)*hk;
- Req=0.4*R;
- C1=8*(( (A(1)+A(5))/45)+((2*A(2)+4*A(9))/49));
- Ynumg=linspace(100,700,7);
- i=((9*(P-(3.1416*q*(Req)^2))^2)/(64*C1*q))^(1/3);
```

```
- %Modelo estático global

- D11=(E1*b*(hk)*(H^2))/(2);
- S=Gc*b*H;
- K=(192*D11*S)/((S*(a)^3)+(48*D11*a));
- g=(p/K);

%Deformación Total

- e=subs(i,P,Ynumg);
- G=subs(g,p,Ynumg);
- hold on
- plot(G+e,Ynumg)
- hold off
```

Ventana de comandos:

```
- syms P
- syms p
- E1 = 142000
- E2 = 9800
- G12 = 7100
- v12 = 0.3
- R = 12.7
- hk = 0.175
- q = 1.389
- a = 203
- b = 89
- H = 25.4
- Gc = 24.1
- [v21,Q,Q90,A,Req,C1,Ynumg,i,D11,S,K,g,e,G]= Modelo_estatico_total(P,E1,E2,G12,
v12,R,hk,q,a,b,p,H,Gc)
```

C) Linealización.

Panel sándwich: Laminado [0/90]; Espesor del núcleo: 25.4 mm; Diámetro del proyectil: 38.1 mm

Ventana de edición:

```
- function [v21,Q,Q90,A,Req,C1,Ynum,Ynumg,qd,i,I,X,Y] = Linealizacion (P,E1,E2,
G12,v12,R,hk,q)

- v21 = v12*(E2/E1);
- Q = [E1/(1-v12*v21) E2*v12/(1-v12*v21) 0;E1*v21/(1-v12*v21) E2/(1-v12*v21) 0;0
0 G12];
- Q90 = [E2/(1-v12*v21) E2*v12/(1-v12*v21) 0;E1*v21/(1-v12*v21) E1/(1-v12*v21)
0;0 0 G12];
- A = (Q + Q90)*hk;
- Req=0.4*R;
- C1=8*((A(1)+A(5))/45)+((2*A(2)+4*A(9))/49));
- Ynum=linspace(0,1300,12);
- Ynumg=linspace(100,700,11);
- qd=1.1*q;
- i=((9*(P)^2)/(64*C1*qd))^(1/3);
- I=subs(i,P,Ynumg);
- hold on
- plot(I,Ynumg)
- hold off
```

Ventana de comandos:

```
- syms P
- E1 = 142000
- E2 = 9800
- G12 = 7100
- v12 =0.3
- R = 19.05
- hk = 0.175
- q = 1.389
- [v21,Q,Q90,A,Req,C1,Ynum,Ynumg,qd,i,I,X,Y] = Linealizacion (P,E1,E2, G12,v12,
R,hk,q)
```

D) Modelo dinámico.

Panel sándwich: Laminado [0/90]; Espesor del núcleo: 25.4 mm; Diámetro del proyectil: 38.1 mm; Velocidad: 1.2m/s

Ventana de edición:

```
- function[v21,Q,Q90,A,qd,Qd,Req,C1,C1d,z1,z2,z3,z4,D,D1,d,U,v1,v2,D11,S,Kgd,
K1d,w,y0,y,ac,F,X,F1,F2]=dinamico(t,k1d,kgd,E1,E2,G12,Gc,v12,R,H,hk,a,b,M0,v0,q)

- %Estático local

- v21 = v12*(E2/E1);
- Q = [E1/(1-v12*v21) E2*v12/(1-v12*v21) 0;E1*v21/(1-v12*v21) E2/(1-v12*v21) 0;0
0 G12];
- Q90 = [E2/(1-v12*v21) E2*v12/(1-v12*v21) 0;E1*v21/(1-v12*v21) E1/(1-v12*v21)
0;0 0 G12];
- A = (Q + Q90)*hk;
- qd=1.1*q;
- Req=0.4*R;
- Qd= 3.1415*((Req)^2)*qd;
- C1=8*((A(1)+A(5))/45)+((2*A(2)+4*A(9))/49));
- C1d=C1;

- %Estático global

- D11=(E1*(hk)*(H^2))/(2);
- S = Gc*b*H;
- Kgd=(192*D11*S)/(((S*(a^3)))+(48*D11*a));

- %LINEALIZACIÓN
- K1d=(528.35)*10^3;

- %Dinámico
- w=((k1d*kgd)/((k1d+kgd)*M0))^(1/2);
- y0=(kgd*v0)/(kgd+k1d);
- y=(y0/w)*sin(w*t)+(Qd/k1d)*cos(w*t)-(Qd/k1d);
- ac=diff(y,t,2);
- F=-M0*(1+(k1d/kgd))*ac;
- X=linspace(0,0.01,45);
- F1=subs(F,{k1d,kgd},{K1d,Kgd});
- F2=subs(F1,t,X);
- hold on
- plot(X,F2,'k')
- hold off
```

Ventana de comandos:

```
- syms t
- syms k1d
- syms kgd
- E1 = 1.42 * 10^11
- E2 = 9.80 * 10^11
- G12 = 7.10 * 10^11
- Gc = 24100000
```

```
- v12 = 0.3
- R = 0.019
- H = 0.0254
- hk = 0.000175
- a = 0.203
- b = 0.089
- M0 = 1.69
- v0 = 1.2
- q = 13890000
```

E) Resolución del problema dinámico teniendo en cuenta las masas.

Panel sándwich: Laminado [0/90]; Espesor del núcleo: 25.4 mm; Diámetro del proyectil: 38.1 mm; Velocidad: 1.2m/s

Ventana de comandos:

```
- syms M0
- syms k1d
- syms kgd
- syms v0
- syms qd
- syms t
- syms ms
- syms mf
- [x,y]=dsolve('(qd) + (k1d*x) - (ms*D2y) - (kgd*y)=0',' ((M0+mf)*(D2y+D2x)) + (k1d*x)+(qd)=0','y(0) = 0, Dy(0) = (M0*k1d*v0)/((M0+mf)*(kgd+k1d)+(ms*k1d)), x(0) = 0,Dx(0) = (M0*kgd*v0)/((M0+mf)*(kgd+k1d)+(ms*k1d))')

- % DATOS

- K1d=(528.35)*10^3
- Kgd=1068600
- T=linspace(0,0.01,46)
- Ms=0.0038
- Mf=0.00043
- Qd=278.7032

- %Modelo

- ac=diff(x,t,2);
- ac1=subs(ac,{k1d},{K1d})
- ac2=subs(ac1,{kgd},{Kgd})
- ac3=subs(ac2,{M0},{1.69})
- ac4=subs(ac3,{v0,qd},{1.2,Qd})
- ac5=subs(ac4,{ms,mf},{Ms,Mf})
- bc=diff(y,t,2)
- bc1=subs(bc,{mf},{Mf})
- bc2=subs(bc1,{ms},{Ms})
- bc3=subs(bc2,{M0},{1.69})
- bc4=subs(bc3,{kgd},{Kgd})
- bc5=subs(bc4,{k1d},{K1d})
- bc6=subs(bc5,{v0,qd},{1.2,Qd})
- F=-M0*(bc6+ac5);
- Fc=subs(F,{M0},{1.69});
- Fac=subs(Fc,t,T)
```


F) Resolución de las ecuaciones del modelo sin simplificar.

Panel sándwich: Laminado [0/90]; Espesor del núcleo: 25.4 mm; Diámetro del proyectil: 38.1 mm; Velocidad: 1.2m/s

Ventana de edición:

```
- function [f] = Definitivo(t,y,kld,kgd,Qd,M0,ms,mf)

- %Datos

- kld=1.1161e+007;
- M0=1.61;
- kgd=1.0686e+006;
- Qd=278.70;
- ms=0.0038;
- mf=0.00043

- %Modelo

- sol=solve(' (M0+mf) * (X+Y)+kld*y^(3/2)+Qd','Qd+kld*y^(3/2)-kgd*x-ms*X','X','Y')
- sol.X = y(1);
- sol.Y = y(3);
- f=zeros(4,1);
- f(1)=y(2);
- f(2)=y(1)
- f(3)=y(4);
- f(4)=y(3);
- X=linspace(0,0.01,22);
```

Ventana de comandos:

```
- [t,y]=ode45(@Definitivo,X,[0,0.9896,0,0.2078])
- f1=(-Qd-kld*y(:,3).^(3/2)+kgd*y(:,1))/ms
- f2=(-M0*Qd-M0*kld*y(:,3).^(3/2)+M0*kgd*y(:,1)-mf*Qd- mf*kld*y(:,3).^(3/2)
+mf*kgd*y(:,1)-kld*y(:,3).^(3/2)*ms-Qd*ms)/ms/(M0+mf)
- F=-M0*(f1+f2)
- hold on
- plot(t,F,'g')
- hold off
```